Egzamin licencjacki/inżynierski — 26 czerwca 2020

Informacja dla zdających egzamin na kierunku informatyka:

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Programowanie, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne, Matematyka II) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

Informacja dla zdających egzamin na kierunku indywidualne studia informatyczno-matematyczne:

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Programowanie, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne, Języki formalne i złożoność obliczeniowa) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

Informacja dla wszystkich zdających:

Za brakujące (do trzech) zestawy zostanie wystawiona ocena niedostateczna z urzędu. Egzamin uważa się za zaliczony, jeśli student rozwiąże z oceną dostateczną co najmniej 2 zestawy. Wtedy ocena z egzaminu jest średnią arytmetyczną ocen z trzech wybranych zestawów. Na rozwiązanie przeznacza się czas 3x40=120 minut. Po wyjściu z sali egzaminacyjnej w czasie egzaminu nie ma możliwości powrotu do tej sali i kontynuowania pisania egzaminu.

Matematyka I — Logika dla informatyków

Rozważmy alfabet $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{41}\}$ o dokładnie 42 elementach. Dla słowa $w \in A^*$ jego długość oznacamy przez $|w|$. Powiemy, że funkcja $f : A^* \to A^*$ zachowuje długość słów, jeśli dla wszystkich $w \in A^*$ zachodzi warunek $|f(w)| = |w|$. Oznaczmy zbiór wszyskich takich funkcji (czyli funkcji z A^* w A^* zachowujących długość słów) przez $\mathcal{F}$.
Konstruując injekcję z $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ w $\mathcal{F}$ udowodnij, że $\mathcal{F}$ ma moc co najmniej continuum.

Programowanie

Za tę część egzaminu można otrzymać 20 punktów. Aby otrzymac ocenę dostateczną, należy zdobyć 7 punktów, próg dla dst+ to 9p, dla db – 11p, dla db+ 13p, dla bdb – 15p.

Zadanie 1. Gramatyka G_1 z symbolem startowym S nad alfabetem $\{a, b, c\}$ dana jest za pomocą następującego zbioru produkcji:

$$X \to aaX,\ X \to bbX,\ X \to XX, X \to \varepsilon,\ S \to X,\ S \to cSc$$

Gramatyka G_2 z symbolem startowym S nad alfabetem $\{a, b, c\}$ dana jest za pomocą następującego zbioru produkcji:

$$X \to aaaX,\ X \to bbbX, X \to \varepsilon,\ S \to X,\ S \to ccScc$$

Dla gramatyki G przez $L(G)$ rozumieć będziemy język generowany przez G.

a) Czy $ccaabbcc$ należy do $L(G_1)$? Odpowiedź uzasadnij. **(1)**

b) Czy gramatyka G_2 jest jednoznaczna? Odpowiedź krótko uzasadnij. **(2)**

c) Czy można skreślić jakąś produkcję w G_1 nie zmieniając generowanego przez tę gramatykę języka? Jeżeli tak, to którą? **(1)**

d) Napisz gramatykę G_3, taką że $L(G_1) \cap L(G_2) = L(G_3)$ **(2)**

e) Napisz w języku imperatywnym funkcję, która bierze jako wejście napis i zwraca wartość logiczną, równą True wtedy i tylko wtedy, gdy ten napis należy do zbioru $L(G_1) \cap L(G_2))$
.

Możesz używać języka wybranego z następującej listy: C, C++, Java, C#, Python, Ruby, Go, Rust. **(4)**

Zadanie 2. (3p) Napisz w Prologu predykat `no_repetition(L)`, który (dla stałej listy `L`) kończy się sukcesem wtedy i tylko wtedy, gdy żaden element na liście `L` się nie powtarza. Predykat powinien być napisany bez użycia rekurencji, można jednak używać predykatów `append`, `member` oraz negacji.

Zadanie 3. (7p) W wybranym języku funkcyjnym (Haskell, Ocaml, Racket) zaproponuj sposób reprezentacji i częściowo zaimplementuj *wyrażenia zbiorowe*, dla zbiorów liczb całkowitych. Powinieneś obsługiwać operacje sumy, części wspólnej oraz odejmowania zbiorów. W szczególności:

a) Opisz swoją reprezentację (przedstawiając definicje typów, jeżeli język ich wymaga) i pokaż, jak wygląda w niej wyrażenie:

$$(\{1,2,3\} - \{0,1,2\}) \cup (\{4,5,6\} \cap \{6,7,8\})$$

(3p)

b) Wybierz jakąś operację mnogościową (suma, część wspólna, różnica) i przedstaw jej implementację. (2p)

c) Napisz funkcję, która oblicza wartość wyrażenia mnogościowego. Możesz korzystać z funkcji implementujących wszystkie wspomniane wyżej operacje (niezależnie od tego, którą zaimplementowałeś) (2p)

Matematyka dyskretna

Grafem królowej nazywamy graf, którego wierzchołkami są pola szachownicy $r \times r$ i dwa pola połączone są krawędzią, gdy może między nimi w jednym ruchu przejść królowa (znana też jako hetman). Podaj wzór na liczbę krawędzi grafu królowej w zależności od r.

Algorytmy i struktury danych

Za rozwiązanie obydwu zadań z tej części można otrzymać w sumie do 9 punktów. Skala ocen: poniżej 3 punktów — ocena niedostateczna (egzamin niezdany), 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, 7 albo więcej punktów daje ocenę bardzo dobrą.

Zadanie 1: liczby w pobliżu mediany (5 punktów)

Dany jest zbiór n liczb rzeczywistych, oraz liczba naturalna k taka, że $1 < k < n$. Należy wyznaczyć k kiczb w tym zbiorze, które co do wartości bezwzględnej są najbliższe medianie.

Opracuj efektywny algorytm, który rozwiąże to zadanie. Opisz ideę algorytmu, uzasadnij jego poprawność, zapisz go w pseudokodzie i oszacuj jego złożoność obliczeniową. Czas działania tego algorytmu powinien być lepszy niż czas sortowania n wartości.

Podaj proste przykłady danych, dla których:

- poprawny wynik nie jest jednoznaczny;
- mediana jest minimalnym elementem w rozwiązaniu.

Zadanie 2: kaktusy na schodach (4 punkty)

Pewien rycerz musi się przedostać na szczyt wieży, aby uratować księżniczkę. Na szczyt prowadzą wąskie schody, na których rosną kaktusy — kaktusy rosną tylko na schodach, na górnej platformie nie ma kaktusów, rycerz stoi przed pierwszym schodem. Liczba stopni wynosi $n > 1$ a na każdym stopniu rośnie a_i kaktusów, przy czym $a_i \geq 0$ dla $i = 1 \dots n$. Rycerz ma długie nogi i może w jednym kroku pokonać nawet $k > 1$ stopni. Stając na stopniu rozgniata wszystkie kaktusy, które tam rosną. Jednak jego buty wytrzymają spotkanie z co najwyżej p kaktusami. Czy uda mu się uratować księzniczkę?

Opracuj algorytm, który dla zadanych parametrów n, k, p oraz ciągu a_i rozstrzygnie, czy los księżniczki jest przesądzony czy też jest szansa na jej uratowanie. Opisz ideę algorytmu, uzasadnij jego poprawność, zapisz go w pseudokodzie i oszacuj jego złożoność obliczeniową.

Metody numeryczne

Za rozwiązanie zadania można otrzymać łącznie 12 punktów. Otrzymanie 4 pkt. gwarantuje ocenę dostateczną, próg dla dst+ to 5.5 pkt., dla db – 7 pkt., dla db+ 9 pkt., a dla bdb – 11 pkt.

1. $\boxed{\textbf{3 punkty}}$ Dla jakich wartości x obliczanie wartości wyrażenia $(\sqrt{x^6 + 2020} + x^3)^{-1}$ może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposób obliczenia wyniku dokładniejszego.

2. $\boxed{\textbf{4 punkty}}$ Podaj postać Newtona wielomianu interpolacyjnego dla następujących danych:

   a)

x_k	-2	-1	0	1
y_k	3	5	9	15

   b)

x_k	1	2	-1	-2	0
y_k	15	-1	5	3	9

   Uwaga. W wypadku podpunktu **b) tylko** *sprytne* rozwiązania wchodzą w grę.

3. $\boxed{\textbf{5 punktów}}$ Załóżmy, że macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest nieosobliwa i ma rozkład LU. Niech dane będą wektory $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^n$. Zaproponuj **oszczędny** algorytm wyznaczania wektorów $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$, dla kórych $Ax_k = b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ i określ jego złożoność. Jak opracowaną metodę zastosować do znalezienia takiej macierzy $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dla której $AX = B$, gdzie macierz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest dana?

   Uwaga. W rozwiązaniu **nie wolno** wprost wyznaczać macierzy A^{-1}, bo – jak wiadomo – nie jest to bezpieczne z numerycznego punktu widzenia.

Matematyka II — Algebra

A jest macierzą rozmiaru $m \times n$ o elementach rzeczywistych, $b \in \mathbb{R}^m$. Symbol $[A\ b]$ oznacza macierz rozszerzoną (rozmiaru $m \times (n + 1)$, ostatnią kolumną tej macierzy jest wektor b, wcześniejsze kolumny są takie jak w macierzy A). Udowodnić, że:
Układ równań $Ax = b$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A\ b])$

Zadanie 2. (7 punktów)
Niech G będzie grupą, natomiast a ustalonym elementem tej grupy. Określmy przekształcenie ϕ_a następująco $\phi_a(g) = aga^{-1}$. Udowodnić, że ϕ_a jest izomorfizmem grupy G w grupę G (izomorfizmem grupy G w siebie).

Progi punktowe: 4, 6, 8, 10, 12 punktów.

Języki formalne i złożoność obliczeniowa

Zadanie 1 [2 punkty] Rozpatrzmy następującą definicję: Problem należy do klasy NP, jeśli istnieje taki program komputerowy, który dla danej instancji problemu zwraca formułę logiki zdaniowej, która jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy ta instancja jest pozytywna. Czy ta definicja jest równoważna klasycznej? Odpowiedź uzasadnij.
Zadanie 2 [3 punkty] W ramach wdrażania programu Uczelnia Badawcza pewien rektor miał za zadanie powołać najpierw Komitet Sterujący, a następnie n zespołów zgodnie z zasadą, że w każdym zespole ma być co najmniej jeden członek Komitetu Sterującego i co najmniej jedna osoba, która nie jest w Komitecie Sterującym. Niestety, roztargniony rektor zapomniał o tych zasadach i o Komitecie Sterującym. Czy da się to teraz naprawić?

Jaką złożoność ma następujący problem: Dane: liczba n oraz składy osobowe n zespołów (reprezentowane jako pary [nazwa zespołu, unikalny identyfikator osoby]) Pytanie: czy można wybrać Komitet Sterujący tak, żeby w każdym zespole zasiadał co najmniej jeden członek komitetu oraz jedna osoba nie będąca w tym komitecie?