

Egzamin licencjacki/inżynierski — 24 czerwca 2016

Informacja dla zdających egzamin na kierunku informatyka:

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Programowanie, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne, Matematyka II) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

Informacja dla zdających egzamin na kierunku indywidualne studia informatyczno-matematyczne:

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Programowanie, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne, Języki formalne i złożoność obliczeniowa) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

Informacja dla wszystkich zdających:

Za brakujące (do trzech) zestawy zostanie wystawiona ocena niedostateczna z urzędu. Egzamin uważa się za zaliczony, jeśli student rozwiąże z oceną dostateczną co najmniej 2 zestawy. Wtedy ocena z egzaminu jest średnią arytmetyczną ocen z trzech wybranych zestawów. Na rozwiązanie przeznaczona jest czas $3 \times 40 = 120$ minut. Po wyjściu z sali egzaminacyjnej w czasie egzaminu nie ma możliwości powrotu do tej sali i kontynuowania pisania egzaminu.

Matematyka I — Logika dla informatyków

Niech A będzie dowolnym zbiorem. *Multizbiorem* nad A nazywamy dowolną funkcję $S : A \rightarrow \mathbb{N}$ (mówimy wtedy, że $S(x)$ jest liczbą wystąpień elementu x w multizbiorze S). Jeśli S_1 i S_2 są multizbiorami, to ich przekrój $S_1 \cap S_2$, sumę $S_1 \cup S_2$ i dopełnienie \overline{S} definiujemy wzorami

$$\begin{aligned}(S_1 \cap S_2)(x) &= \min(S_1(x), S_2(x)) \\ (S_1 \cup S_2)(x) &= S_1(x) + S_2(x) \\ \overline{S}(x) &= \begin{cases} 1, & \text{gdy } S(x) = 0 \\ 0, & \text{wpp.} \end{cases}\end{aligned}$$

- (a) Czy dla dowolnych multizbiorów X, Y nad zbiorem A zachodzi równość

$$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y} ?$$

- (b) Czy dla dowolnych multizbiorów X, Y nad zbiorem A zachodzi równość

$$\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} ?$$

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić.

Programowanie

Za tę część egzaminu można otrzymać 20 punktów. Aby otrzymać ocenę dostateczną, należy zdobyć 7 punktów, próg dla dst+ to 9p, dla db – 11p, dla db+ 13p, dla bdb – 15p.

Zadanie 1. Gramatyka G_1 z symbolem startowym S nad alfabetem $\{a, b\}$ dana jest za pomocą następującego zbioru produkcji:

$$S \rightarrow aSSb, S \rightarrow \varepsilon$$

Dla gramatyki G przez $L(G)$ rozumiemy język generowany przez G . Dla wyrażenia regularnego r przez $\mathcal{L}(r)$ rozumiemy język opisany przez wyrażenie r .

- a) Czy $abbaa$ należy do $L(G_1)$? Odpowiedź uzasadnij. **(1)**
- b) Czy gramatyka G_1 jest jednoznaczna? Odpowiedź krótko uzasadnij. **(2)**
- c) Ciąg poprawnie rozstawionych nawiasów to taki ciąg nawiasów, który można otrzymać z poprawnego wyrażenia arytmetycznego po usunięciu znaków działań i liczb. Odpowiedz na pytanie: czy jeżeli uznamy, że a to jest nawias otwierający, a b to nawias zamykający, to czy wówczas G_1 generuje zbiór wszystkich poprawnych nawiasów? A czy generuje podzbiór lub nadzbiór zbioru poprawnych nawiasów? Odpowiedź uzasadnij. **(3)**
- d) Napisz w języku imperatywnym funkcję, która bierze jako wejście napis i zwraca wartość logiczną, równą `True` wtedy i tylko wtedy, gdy ten napis należy do zbioru $L(G_1) \cap \mathcal{L}((aa)^*(bbb)^*)$. Możesz używać języka wybranego z następującej listy: C, C++, Java, C#, Python, Ruby, PHP, AWK, Pascal. **(4)**

Zadanie 2. Będziemy rozważać następujące operacje na listach:

- Sklejanie (konkatenacja) list, oznaczana znakiem $+$
- Mnożenie list przez liczbę naturalną dodatnią (oznaczającą n -krotne sklejanie danej listy ze sobą)

Przykładowo: $3 * [1, 2] + [4, 5, 6]$ jest równe $[1, 2, 1, 2, 1, 2, 4, 5, 6]$.

Skalar w mnożeniu może być po lewej lub prawej stronie, można również używać nawiasów. Wyrażenie zbudowane z tych operacji i stałych listowych nazwiemy *wyrażeniem listowym*. Mnożenie ma większy priorytet niż dodawanie. Napisz w Prologu predykat `compute(Term, Value)`, który oblicza wartość wyrażenia listowego. Nie powinieneś korzystać z żadnych predykatów standardowych, ale możesz zdefiniować własne predykaty pomocnicze (które mogą mieć nazwy występujące w standardowej bibliotece Prologa). **(5p)**

Zadanie 3. (5p) W Haskellu mamy dwie ważne funkcje `foldl` oraz `foldr`. Podaj ich typy i napisz definicję jednej z nich. Podaj 2 przykłady zastosowań tych funkcji (wybierając do każdego zastosowania tę, która najbardziej pasuje)¹.

Matematyka dyskretna

Pokaż, że w drzewie bez wierzchołków stopnia 2 jest więcej liści, niż wierzchołków wewnętrznych.

Algorytmy i struktury danych

Za rozwiązanie obydwu zadań z tej części można otrzymać w sumie do 9 punktów. Skala ocen: poniżej 3 punktów — ocena niedostateczna (egzamin niezdany), 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, 7 albo więcej punktów daje ocenę bardzo dobrą.

¹To znaczy masz podać i opisać dwie proste funkcje, z których każda używa `foldl` lub `foldr`. Nie jest wymagane, by używały różnych.

Zadanie 1: podzbiór sumujący się do zadanej wartości (5 punktów)

Dany jest zbiór n liczb naturalnych $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ oraz liczba naturalna t . Skonstruuj i opisz pseudowielomianowy algorytm o złożoności $O(nt)$, który sprawdzi, czy istnieje pewien podzbiór tych liczb sumujący się do t (każdą liczbę możesz wykorzystać co najwyżej raz).

Precyzyjnie opisz swój algorytm i oszacuj jego złożoność obliczeniową (czasową i pamięciową). Uzasadnij poprawność opisanego algorytmu.

Zadanie 2: graf acykliczny (4 punkty)

Dany jest graf skierowany $D = (V, E)$. Skonstruuj i opisz algorytm, który sprawdzi, czy graf ten jest acykliczny (czy w grafie tym nie występuje żaden cykl).

Precyzyjnie opisz swój algorytm i oszacuj jego złożoność obliczeniową.

Metody numeryczne

Za rozwiązanie zadań można otrzymać łącznie 12 punktów. Otrzymanie 4 pkt. gwarantuje ocenę dostateczną, próg dla dst+ to 5.5 pkt., dla db – 7 pkt., dla db+ 9 pkt., a dla bdb – 11 pkt.

1. **4 punkty** Załóżmy, że liczby x_0, x_1, \dots, x_n są tego samego znaku. Uzasadnij, że zadanie obliczania ich sumy jest zadaniem dobrze uwarunkowanym. Jakie znaczenie ma ten fakt w kontekście obliczeń numerycznych?
2. **4 punkty** Niech p będzie wielomianem zmiennej t stopnia co najwyżej n . W języku PW0++ procedura `BezierCoeffs(p, t)` wyznacza taki wektor $\mathbf{c} := [c_0, c_1, \dots, c_n]$, że

$$p(t) = \sum_{k=0}^n c_k B_k^n(t),$$

gdzie $B_0^n, B_1^n, \dots, B_n^n$ są wielomianami Bernsteina stopnia n ,

$$B_k^n(t) := \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n; n \in \mathbb{N}).$$

Współczynniki c_k ($0 \leq k \leq n$) nazywamy *współczynnikami Béziera* wielomianu p . Niestety, procedura ta ma **pewne ograniczenie**, mianowicie: **musi być** $n \leq 50$.

W jaki sposób, używając procedury `BezierCoeffs` co najwyżej **dwa razy**, wyznaczyć współczynniki Béziera wielomianu $w(t) := p(t) \cdot q(t)$, gdzie $p \in \Pi_{50}$, a $q \in \Pi_2$? Jak zmieni się rozwiązanie, jeśli przyjąć, że $q \in \Pi_{50}$?

3. **4 punkty** Opisz kwadratury złożone. Jaką mają one przewagę nad kwadraturami Newtona-Cotesa? Czy są one związane z metodą Romberga? Jeśli tak, to w jaki sposób?

Matematyka II — Algebra

Za zadania można otrzymać 13 punktów. Aby otrzymać ocenę dostateczną, należy zdobyć 3 punkty, próg dla dst+ to 5p, dla db – 7p, dla db+ 9p, dla bdb – 11p.

Zadanie 1. (8 punktów)

Wyznaczyć wartości i wektory własne macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & 11 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. (5 punktów)

Podać współczynniki rozwinięcia wielomianu $L_3(x) = x^3 - 7x^2 + 12x - 4$ względem bazy (w bazie): $1, x - 1, (x - 1)(x - 2), (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Języki formalne i złożoność obliczeniowa

Niech S będzie zbiorem studentów, którzy zapisali się na pewien egzamin licencjacki, oraz $E \subseteq S^2$ będzie zbiorem par studentów. Dziekan chce przydzielić studentów do trzech sal tak, aby żadna para należąca do E nie była w tej samej sali, a w każdej sali pisała przynajmniej jedna czwarta wszystkich studentów z S . Czy problem istnienia takiego przydziału jest NP-zupełny?