

Algorytmy i Struktury Danych

egzamin na stacjonarne studia II stopnia na kierunku informatyka

15 lutego 2021 r.

Udziel krótkich ale wyczerpujących odpowiedzi na poniższe pytania.

Zadanie 1: rekurencyjne obliczanie liczby Fibonacciego (20 punktów)

Wykaż, że złożoność czasowa rekurencyjnej funkcji obliczającej n -tą liczbę Fibonacciego ze wzoru $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ oraz $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$ jest rzędu $\Omega(\sqrt{2}^n)$.

Wskazówka: oszacuj liczbę wywołań funkcji rekurencyjnej.

Zadanie 2: dolna granica dla problemu skalania (20 punktów)

Udowodnij, że w modelu drzew decyzyjnych zadanie scalenia dwóch ciągów uporządkowanych o długościach odpowiednio n i m wymaga wykonania $\Omega\left(m\left(\log\left(\frac{n}{m} + 1\right)\right)\right)$ porównań.

Zadanie 3: znajdowanie $a_i = i$ w ciągu uporządkowanym (30 punktów)

Dany jest n -elementowy rosnący ciąg liczb całkowitych $A = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, taki że $a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1}$. Można założyć, że liczby te są zapisane w tablicy $A[0 \dots n-1]$. Opisz efektywny algorytm (działający poniżej czasu liniowego), który sprawdzi czy w tym ciągu znajduje się chociaż jeden taki element, że na i -tej pozycji znajduje się wartość i , czyli $A[i] = i$ dla pewnego $i \in \{0 \dots n-1\}$. Jeśli taki element istnieje, to należy wypisać jedną taką wartość, a jeśli nie ma takiego elementu, to należy wypisać -1 . Uzasadnij poprawność twojego algorytmu i przeanalizuj jego złożoność obliczeniową.

Przykład: dla ciągu liczb $[-3, -1, 1, 3, 4, 5, 7, 9]$ algorytm może odpowiedzieć liczbą 4 (albo 3 lub 5) a dla ciągu liczb $[-1, 2, 5, 7, 8, 9]$ algorytm ma odpowiedzieć wartością -1 .

Zadanie 4: drzewiasta struktura danych dla zbiorów rozłącznych (30 punktów)

Rozważmy problem zbiorów rozłącznych nad n -elementowym uniwersum. Początkowo danych jest n jednoelementowych zbiorów. Następnie na zbiorach tych wykonujemy ciąg m operacji *union* (łączenie zbiorów) i *find* (wskazanie reprezentanta zbioru).

- Opisz drzewiastą strukturę danych reprezentującą zbiory rozłączne. Jaka jest struktura pojedynczego węzła w takiej reprezentacji? Który element jest reprezentantem zbioru?
- Napisz, na czym polega zbalansowane łączenie w takiej reprezentacji zbiorów rozłącznych. Jaką rolę odgrywa ranga drzewa podczas łączenia.
- Zapisz w pseudokodzie procedurę realizującą operację zbalansowaną *union*.
- Napisz, na czym polega ścieżka w trakcie znajdowania reprezentanta zbioru?
- Zapisz w pseudokodzie procedurę realizującą operację *find* z kompresją ścieżki.
- Jaka jest złożoność czasowa każdej z tych operacji w przypadku pesymistycznym? Jaki jest amortyzowany koszt wykonania ciągu m operacji *union* i *find* na tej strukturze?