28 września 2023

Zadania z kombinatoryki, lista nr 1

1. W sklepie dolarowym każdy z k oferowanych artykułów kosztuje dolara. Na ile sposobów może zrobić zakupy klient dysponujący m dolarami (nie musi wydać wszystkiego)?

2. Z grupy n mężczyzn i n kobiet wybieramy podzbiór liczący tyle samo kobiet i mężczyzn. Następnie w podzbiorze wybieramy przywódcę mężczyzn spośród mężczyzn i przywódcę kobiet spośród kobiet. Rozważając liczbę sposobów na jakie można to uczynić pokaż, że
$$1^2\binom{n}{1}^2 + 2^2\binom{n}{2}^2 + \cdots + n^2\binom{n}{n}^2 = n^2\binom{2n-2}{n-1}$$

3. Rozważając kolorowania k spośród n kulek dwoma kolorami pokaż, że
$$\binom{n}{0}\binom{n}{k} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = 2^k\binom{n}{k}$$

4. W koło wpisano n-kąt tak, że żadne trzy jego przekątne nie przecinają się w jednym punkcie wewnątrz koła. Pokaż, że przekątne i boki n-kąta dzielą koło na
$$\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$$
obszarów.

5. Niech $\binom{x}{k} = x^{\underline{k}}/k!$. Udowodnij wzory
   (a) $\displaystyle\sum_{k:k\le m}\binom{x}{k}\left(\frac{x}{2}-k\right) = \frac{m+1}{2}\binom{x}{m+1}$
   (b) $\displaystyle\sum_{k}(-1)^k\binom{a+b}{a+k}\binom{b+a}{b+k} = \frac{(a+b)!}{a!b!}$
   (c) $\displaystyle\sum_{k}(-1)^k\binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+a}{c+k} = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$
   (d) $\displaystyle\sum_{k}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

6. Wylicz wartość sum
   (a) $\displaystyle\sum_{k}\binom{n}{k}k$
   (b) $\displaystyle\sum_{k\ge 0}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

7. Udowodnij następujące tożsamości:
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$
   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$
   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{x}{n-k}\binom{y+k}{k} = \binom{x-y-1}{n}$
   (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{x}{k} = \binom{n-x}{n} = (-1)^n\binom{x-1}{n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x}{k}\right)$
   (e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n}{k}\binom{x}{k}}{\binom{y}{k}} = \frac{\binom{y-x}{n}}{\binom{y}{n}}$
   (f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n}{k}}{\binom{x+k}{k}} = \frac{x}{x+n}$