4 stycznia 2024

Zadania z kombinatoryki, lista nr 10

1. Ciągła wersja zasady szufladkowej może być sformułowana następująco. Dana jest pewna liczba obszarów zawartych w figurze o polu S. Suma pól powierzchni tych obszarów przekracza kS. Wtedy istnieje $k+1$ obszarów mających punkt wspólny.

   (a) W kwadracie o boku 1 dane są 64 punkty. Pokaż, że trzy z nich leżą w pewnym kole o promieniu $1/8$.

   (b) W kole o promieniu 16 zawartych jest 650 punktów. Pokaż, że jakieś 10 z nich można pokryć pierścieniem o promieniu zewnętrznym 3 i wewnętrznym 2 (pierścień otrzymujemy jako różnicę kół współśrodkowych).

   (c) W kwadracie o boku 1 zawarta jest figura w której odległość między żadnymi dwoma punktami nie wynosi $1/1000$. Pokaż, że powierzchnia jej jest mniejsza, niż 0.34. A może umiesz wykazać, że jest ona mniejsza od 0.29?

2. Na płaszczyźnie znajduje się N punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Każdy z $\binom{N}{2}$ odcinków między nimi pomalowany jest jednym z k kolorów. Pokaż, że jeśli $N > \lfloor ek! \rfloor$, to istnieje trójkąt złożony z trzech odcinków tego samego koloru.

   Wsk.: Zastosuj indukcję po k.

3. Udowodnij, że jeśli $n \geq R(m,m,m,m)$, to dowolna macierz zero–jedynkowa wymiaru $n \times n$ zawiera podmacierz główną (otrzymaną przez wybranie wierszy i kolumn o tych samych numerach) $m \times m$ w jednej z następujących postaci.

$$\begin{bmatrix} * & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & & & 1 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 1 & & & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & & & 1 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 1 & & & * \end{bmatrix}.$$

   Czyli diagonalną, trójkątną lub negację którejś z nich.

4. Powtórz rozumowanie z wykładu dla grafu K_n pomalowanego r kolorami i pokaż że

$$R(k;r) \leq r^{(k-2)r+2}.$$

   Powtórz to rozumowanie dla nieskończonego (przeliczalnego) grafu pełnego K_∞ i pokaż, że zawiera on jednobarwny K_∞.

5. (Nieskończona wersja Twierdzenia Ramseya) Pokaż, że jeśli wszystkie podzbiory r-elementowe zbioru nieskończonego Ω pomalujemy k kolorami, to istnieje taki nieskończony T zawarty w Ω, że wszystkie r-elementowe podzbiory T mają ten sam kolor.

   Wsk.: Możliwy schemat dowodu: indukcja po r. Konstruujemy nieskończone ciągi punktów $x_0, x_1, x_2, \ldots$ i zbiorów $S_0, S_1, S_2, \ldots$. Z S_i wybieramy dowolny x_i, kolorujemy każdy $(r-1)$-elementowy podzbiór Z zbioru $S_i \setminus \{x_i\}$ kolorem $Z \cup \{x_i\}$. Z $S_i \setminus \{x_i\}$ wybieramy jednobarwny ze względu na to ostatnie kolorowanie podzbiór S_{i+1} i x_i przyporządkowujemy ten kolor. Następnie pokazujemy, że za T można wziąc nieskończony jednobarwny podciąg ciągu $x_0, x_1, x_2, \ldots$.

6. Niech $R(k,l)$ będzie minimalnym n, że K_n pomalowany 2-ma kolorami zawiera K_k pierwszego koloru, lub K_l drugiego. Uzasadnij zależności:

$$R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1), \qquad R(k,2) = R(2,k) = k.$$

   Pokaż też, że gdy $R(k-1,l)$ i $R(k,l-1)$ są parzyste, to

$$R(k,l) < R(k-1,l) + R(k,l-1)$$

   Korzystając z tych nierówności oszacuj $R(4,4)$.

7. Na płaszczyźnie znajduje się n punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe.

   (a) Pokaż, że wśród dowolnych pięciu punktów jakieś cztery są wierzchołkami czworokąta wypukłego.

   (b) Pokaż, że jeśli każde cztery spośród pewnych m punktów są wierzchołkami czworokąta wypukłego, to te m punktów jest wierzchołkami m-kąta wypukłego.

   (c) Pokaż, że jeśli $n \geq R_4(5,m)$, to wśród naszych n punktów istnieje m, które są wierzchołkami m-kąta wypukłego.

8. (Twierdzenie Shura) Pokaż, że dla każdego r istnieje takie n, że jeśli pokolorujemy liczby $\{1,2,\ldots,n\}$ na r kolorów, to istnieją takie x, y, że $x, y, x+y$ są tego samego koloru.

   Wsk.: Zastosuj twierdzenie Ramsey'a do grafu którego wierzchołkami są $\{1,2,\ldots,n\}$, i krawędź $\{a,b\}$ ma kolor el. $|a-b|$.