4 stycznia 2024

Zadania z kombinatoryki, lista nr 11

1. (Skierowana wersja twierdzenia Ramseya) Pokaż, że dla każdego k istnieje takie n, że dowolny turniej o n wierzchołkach zawiera k-wierzchołkowy podturniej acykliczny (bez cykli skierowanych).

2. Udowodnij, że w każdym turnieju i przy każdym kolorowaniu jego łuków dwoma kolorami istnieje wierzchołek, z którego można dotrzeć do każdego innego wierzchołka wzdłuż monochromatycznej, skierowanej ścieżki.

3. Udowodnij następujące twierdzenie Turána: Niech $M(n, k)$ oznacza maksymalną liczbę krawędzi w grafie o n wierzchołkach nie zawierającym grafu K_k jako podgrafu. Niech r będzie liczbą taką, że $1 \leq r \leq k-1$ oraz $n = t(k-1) + r$. Wówczas
$$M(n, k) = \frac{k-2}{2(k-1)}(n^2 - r^2) + \binom{r}{2}.$$
Wsk.: Zastosuj indukcję po t.

4. Udowodnij, że jeśli krawędzie grafu K_n pokolorujemy dwoma kolorami, czerwonym i niebieskim, tak, że do i-tego wierzchołka ($i = 1, \ldots, n$) dochodzi dokładnie r_i czerwonych krawędzi, to liczba jednobarwnych trójkątów jeat równa
$$\Delta = \binom{n}{3} - \frac{1}{2}\sum r_i(n-1-r_i)$$
Wyprowadź stąd oszacowanie
$$\Delta \geq \binom{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \right\rfloor \right\rfloor.$$
Wsk.: Każdy trójkąt, który nie jest jednobarwny ma dokładnie dwa wierzchołki w których spotykają się krawędzie różnych kolorów.

5. (Gallai) Zbiór $W \subseteq \mathbb{R}^m$ nazywamy przystającym przez jednokładność do $V \subseteq \mathbb{R}^m$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, takie, że $W = \lambda V + \vec{b}$ ($\lambda V + \vec{b} = \{\lambda\vec{v} + \vec{b} : \vec{v} \in V\}$).
   (a) Pokaż, że przystawanie przez jednokładność jest relacją równoważności.
   (b) Niech elementy $\mathbb{R}^m$ będą pokolorowane skończoną liczbą kolorów r. Udowodnij, że dla dowolnego skończonego $V \subseteq \mathbb{R}^m$ istnieje jednobarwny $W \subseteq \mathbb{R}^m$ przystający do V przez jednokładność.

   Wsk.: Skorzystaj z Twierdzenia Halesa-Jewetta

6. Pokaż, że $W(2) = 3$ i $W(3) = 9$.

7. Udowodnij, że graf G posiada krawędziowy podgraf dwudzielny zawierający co najmniej połowę wszystkich krawędzi G.
   (a) Przeprowadź dowód konstruktywny. Wychodząc od pewnego podgrafu dwudzielnego o podzbiorach partycji V_1, V_2 przerzucaj wierzchołek z jednego z nich do drugiego gdy ma on więcej sąsiadów (w G) w swoim zbiorze niż w drugim. Kiedy takie postępowanie musi się zakończyć?
   (b) A teraz użyj metody probabilistycznej. Losowo podziel V na podzbiory V_1, V_2. Jaka jest oczekiwana liczba krawędzi między V_1 i V_2?

8. Właściciele n kotów i n kanarków dostali wezwania do kliniki weterynaryjnej na szczepienia ochronne przeciwko ptasiokociej grypie. Na każdym wezwaniu widnieje $\lceil \log_2 n + 1 \rceil$ możliwych terminów wizyty, przy czym dowcipny (?!) recepcjonista wygenerował te listy indywidualnie dla każdego właściciela według własnego widzimisię. Pokaż, że wizyty te można tak zaplanować, by każdy z właścicieli odwiedził klinikę w jednym terminów wymienionych na swoim wezwaniu, ale aby w klinice nigdy nie przebywali równocześnie kot i kanarek. Dodajmy, ze w jednym terminie klinikę może odwiedzić dowolna liczba kotów i dowolna liczba kanarków.

9. Dany jest graf G posiadający Δ trójkątów (podgrafów K_3). Pokaż, że istnieje takie pokolorowanie krawędzi G dwoma kolorami, w którym co najwyżej $\Delta/4$ trójkątów jest jednobarwnych.

10. Turniejem nazywamy digraf posiadający dokładnie jeden łuk między każdą parą wierzchłków.
   (a) Pokaż, że istnieje turniej posiadający co najmniej $n!/2^{n-1}$ skierowanych dróg Hamiltona.
   (b) Udowodnij, że istnieje turniej posiadający co najmniej $n!/2^n$ skierowanych cykli Hamiltona.