

## Zadania z kombinatoryki, lista nr 12

1. W tablicy  $n \times n$  każda z liczb  $1, 2, 3, \dots, n$  występuje dokładnie  $n$  razy. Pokaż, że w jakimś wierszu lub kolumnie występuje co najmniej  $\sqrt{n}$  różnych liczb.
2. Niech  $A$  będzie jakimś zbiorem  $n$  reszt modulo  $n^2$ . Pokaż, że istnieje zbiór  $B$  złożony również z  $n$  reszt modulo  $n^2$ , taki że przynajmniej połowa wszystkich reszt modulo  $n^2$  może być zapisana w postaci  $a + b$ , gdzie  $a \in A$ ,  $b \in B$ .
3. Niech  $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_k^2}$  będzie długością wektora  $\vec{v}$ . W przestrzeni zadanych jest  $n$  wektorów jednostkowych  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ . Wykaż, że któryś z wektorów  $\epsilon_1 \vec{v}_1 + \dots + \epsilon_n \vec{v}_n$  dla  $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$  ma długość mniejszą niż  $\sqrt{n}$ .
4. Niech  $n \geq 4$ , a  $H$  będzie rodziną zbiorów  $n$ -elementowych zawierającą co najwyżej  $4^{n-1}/3^n$  zbiorów. Pokaż, że istnieje takie kolorowanie elementów tych zbiorów czterema kolorami, że w każdym zbiorze z  $H$  występują wszystkie cztery kolory.
5. Niech dane będą liczby  $k$  i  $n$ . Znajdź oszacowanie górne na najmniejszą liczbę  $m = m(k, n)$  taką, że istnieje pokolorowanie zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$   $m$  kolorami nie zawierające jednobarwnych ciągów geometrycznych o  $k$  wyrazach.
6. Podaj dolne oszacowania liczb Ramsey'a i Van der Waerdena:  $R(k; r)$  i  $W(k; r)$  dla kolorowania  $r$  kolorami używając naiwnej metody probabilistycznej.
7. Pokaż, że istnieje stała  $c > 0$  o następującej własności. Niech  $A$  będzie macierzą kwadratową  $n \times n$ , której wyrazami są różne liczby rzeczywiste. Wtedy możemy spermutować kolumny i wiersze macierzy  $A$  tak by w żadnym wierszu ani w żadnej kolumnie nie wystąpił rosnący ciąg (niekoniecznie kolejnych) wyrazów długości  $c\sqrt{n}$ .
8. Stosując Lemat Lokalny znajdź oszacowanie na  $W(k; r)$  – minimalne  $n$ , że dowolne kolorowanie zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  używające  $r$  kolorów zawiera postęp arytmetyczny długości  $k$ .
9. Dana jest rodzina  $\mathcal{F}$  zbiorów  $k$ -elementowych, w której każdy zbiór  $S \in \mathcal{F}$  kroi się niepusto z co najwyżej  $d$  innymi zbiorami z  $\mathcal{F}$ . Dowiedz, że jeśli

$$d + 1 < \frac{2^{k-1}}{e},$$

to wtedy  $\mathcal{F}$  może być pokolorowane 2-ma kolorami tak, aby żaden zbiór z  $\mathcal{F}$  nie był jednobarwny.

10. Niech  $S(r)$  będzie najmniejszą liczbą naturalną  $n$  taką, że dla każdego pokolorowania zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$   $r$  kolorami istnieje monochromatyczna trójka Schura, to znaczy istnieją liczby  $x$  i  $y$  takie, że  $x, y$  i  $x + y$  są pokolorowane tym samym kolorem. Stosując „naiwny” wariant metody probabilistycznej, a następnie Lokalny Lemat Lovásza, podaj dwa dolne oszacowania liczby  $S(r)$ .