

Zadania z kombinatoryki, lista nr 2

1. Napisz funkcje tworzące dla ciągów

- (a) a_n – liczba podziałów n na składniki nie większe niż k .
- (b) b_n – liczba podziałów n na co najwyżej k składników.
- (c) c_n – liczba podziałów n na dokładnie k składników.

2. Pokaż, że

- (a) jeśli $q(n, k)$ jest liczbą podziałów n na k różnych składników, to

$$\sum_{n,k} q(n, k) x^n y^k = \prod_i (1 + x^i y)$$

- (b) jeśli $p(n, k)$ jest liczbą podziałów n na k składników, to

$$\sum_{n,k} p(n, k) x^n y^k = \prod_i \frac{1}{1 - x^i y}$$

- (c) jeśli $\sigma(n, k)$ jest liczbą przedstawień n w postaci sumy k dodatnich składników (przedstawienia różniące się kolejnością uważamy za różne), to

$$\sum_n \sigma(n, k) x^n = \left(\frac{x}{1-x} \right)^k$$

3. Pokaż, że

- (a) $p(2n, n) = p(n)$,
- (b) $p(n, k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k)$.
- (c) $p(n, k) = \sum_{i=1}^k p(n-k, i)$

4. Pokaż wzory

$$(a) \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1, \quad (b) \left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}.$$

5. Pokaż wzory

$$(a) \left[\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right] = (n-1)!, \quad (b) \left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right] = (n-1)! H_{n-1}, \quad (c) \left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right] = \binom{n}{2}.$$

6. Wykorzystując wzory z wykładu pokaż równości:

$$(a) x^n = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^{n-k} x^{\bar{k}}$$

$$(b) x^n = \sum_k \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] (-1)^{n-k} x^k$$

$$(c) x^n = \sum_{k,m} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right] (-1)^{n-k} x^m$$

$$(d) \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right] (-1)^{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } m = n \\ 0 & \text{gdy } m \neq n \end{cases}$$

7. Pokaż wzory

$$(a) \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\}$$

$$(b) \left[\begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right] = \sum_k \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \binom{k}{m}$$

$$(c) \binom{i+j}{i} \left[\begin{matrix} n \\ i+j \end{matrix} \right] = \sum_k \binom{n}{k} \binom{k}{i} \left[\begin{matrix} n-k \\ j \end{matrix} \right]$$

$$(d) \binom{i+j}{i} \left\{ \begin{matrix} n \\ i+j \end{matrix} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n-k \\ j \end{matrix} \right\}$$