

Zadania z kombinatoryki, lista nr 5

1. Rozwiń w szereg potęgowy funkcję $x/\sin x$.

2. Napisz wzory na $\sum_{k=1}^{n-1} k^8$ i $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^8}$.

3. Pokaż, że

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \sum_{k,j \geq 0} \begin{Bmatrix} m \\ j \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} j+1 \\ k \end{bmatrix} \frac{(-1)^{j+1-k}}{j+1} n^k.$$

Wykaż też, że

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k k!}{k+1} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}.$$

4. Pokaż, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) z^n = \frac{ze^{xz}}{e^z - 1}$$

5. Udowodnij wzory

$$(a) \sum_{k=0}^n (-1)^k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = 2^{n+1} (2^{n+1} - 1) \frac{B_{n+1}}{n+1},$$

$$(b) \sum_{k=0}^n (-1)^k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}^{-1} = (n+1) B_n.$$

6. Pokaż, że dla wielomianów Bernoulliego prawdziwe są następujące stwierdzenia

- Jeśli m jest parzyste, to $B_m(1/2 - x) = B_m(1/2 + x)$.
- Jeśli m jest nieparzyste, to $B_m(1/2 - x) = -B_m(1/2 + x)$ i jedynym miejscem zerowym $B_m(x)$ w przedziale $(0, 1)$ jest $x = 1/2$.

Wywnioskuj z tego, że dla parzystego m wielomian $B_m(x)$ przyjmuje w przedziale $[0, 1]$ wartości największe co do modułu albo na jego końcach, albo dla $x = 1/2$. Pokaż też, że $B_m(1/2) = (2^{1-m} - 1) B_m$ dla wszystkich $m \geq 0$. Udowodnij, że jeśli m jest parzyste, to

$$\max_{x \in [0, 1]} |B_m(x)| = |B_m|.$$

7. Pokaż, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}.$$

8. Jakie oszacowania na B_{2n} wynikają ze wzoru

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n+1} (2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!}?$$

9. W jaki sposób można zastosować wzór Eulera-Maclaurina do przyspieszenia zbieżności wolno zbieżnego ciągu $x_n = \sum_{k=1}^n 1/k - \ln n$?