

Zadania z kombinatoryki, lista nr 6

1. Pokaż, że

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}.$$

2. (Funkcja
- Γ
-) Dla rzeczywistego
- x
- można zdefiniować

$$x! = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt$$

Pokaż, że

- (a) dla naturalnych
- x
- definicja ta pokrywa się z definicją silni.

(b) $x^n = \frac{x!}{(x-n)!}$

3. Na płaszczyźnie narysowano
- n
- prostych, z których żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. W pierwszym kierunku równoległych jest
- x_1
- prostych, w drugim kierunku równoległych jest
- x_2
- prostych, w trzecim
- x_3
- prostych itd. Pokaż, że liczba punktów przecięcia prostych wynosi

$$\frac{1}{2} (n^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - \dots)$$

4. Niech
- F_n
- będzie
- n
- tą liczbą Fibonacciego.

- (a) Ile jest sposobów wypełnienie prostokąta
- $2 \times n$
- kostkami domina
- 1×2
- ?

- (b) Ile jest ciągów zer i jedynek długości
- n
- , w których żadne dwie jedynki nie są obok siebie?

(c) Pokaż, że $F_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}$

(d) Wylicz wartość sumy $Q_n = \sum_k (-1)^k \binom{n-k}{k}$

5. Niech
- k
- będzie ustaloną liczbą całkowitą. Znajdź wzór na funkcję tworzącą ciągu
- a_n
- określonego jako
- $\sum y_1 y_2 \dots y_k$
- . Sumowanie rozciąga się po wszystkich ciągach
- k
- liczb sumujących się do
- n
- (ciągi różniące się jedynie kolejnością elementów są rozróżnialne).

6. Udowodnij, że

- (a) liczba permutacji
- n
- elementowych typu
- $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$
- wynosi

$$\frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n! 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}}$$

- (b) liczba podziałów zbioru
- n
- elementowego typu
- $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$
- wynosi

$$\frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n! (1!)^{\lambda_1} (2!)^{\lambda_2} \dots (n!)^{\lambda_n}}$$