Rynki predykcyjne

1 Czym są rynki predykcyjne

- rynkowy mechanizm agregowania informacji nt. przyszłego zdarzenia
- *Microsoft, Google, InklingMarkets.com, thewsx.com, yoonew.com, CrowdIQ, NewsFutures*
- Ze strony *InklingMarkets*: Case Studies
  - *Global Consumer Products Company* As part of their product development lifecycle, this company is using our platform to ask questions about the outcome of product testing and performance in the marketplace.
  - *Auto Manufacturer* Helping to manage their portfolio of research projects by predicting which will successfully meet business requirements.
  - *Global Energy Company* Avoid cost and schedule overruns on large, capital and resource intensive projects and assess competitive activity.
  - *Global Natural Resources Firm* Gain consensus on industry trends and related metrics from experts across the company.
  - *Large Telecommunications Company* Augment project management processes to gather input from entire product development teams in regards to risk factors, the ability to meet milestones, and quality control.
  - *Global Consulting Firm* Generate quantitative forecasts for specific business development activities and track progress against strategic initiatives.
  - *Global Financial Services Company* Assess new ideas to improve processes and products.
  - *Top 10 U.S. Bank* Deployed as part of a culture change program by the Human Resources group.
- Przykładowo, ze strony o *Large Telecommunications Company*:
  - How many critical bugs will be in the bug tracking system for Product X by Y date?
  - Will outsource supplier of widget X fulfill their order by the agreed date?
  - Will widget X ordered from outsource supplier have Y flaw?
  - Will competitor X be able to develop technology capability Y by Z date?
  - Will quarter over quarter sales increase by at least x% of product X?
- Na rynku finansowym handluje się *papierami wartościowymi / udziałami / akcjami* (ang. *securities / shares*) dotyczącymi własności przyszłego zdarzenia; zgłoszenie chęci ich nabycia nazwiemy *zamówieniem* (ang. *order*)
  - np. (proste) która z n akcji zostanie podjęta,
  - kombinatoryczne: częściowe informacje o porządku n obiektów, wyrażenie boolowskie nad n zmiennymi binarnymi
- Rynki są (zupełnie lub częściowo) *pari-mutuel*, tzn. przegrani ponoszą koszty nagród dla wygranych
- Na rynku subsydiowanym, po zajściu zdarzenia producent/zarządca rynku (ang. *market maker*) „skupuje papiery” od tych, którzy poprawnie przewidzieli, część zysków klientów nie jest zrównoważona przez straty innych klientów

- Problem z dopasowywaniem ofert kupna i sprzedarzy
  - oferta jest *podzielna* (*divisible*) jeśli klient dopuszcza realizację części zamówienia (z proporcjonalnym limitem ceny), jest *niepodzielna* (*indivisible*) jeśli ma charakter wszystko-lub-nic
  - w przypadku kombinatorycznym obliczeniowy
    - wyliczanie spośród wszystkich $n!$ permutacji czy 2^n kombinacji binarnych jest zbyt niewygodne dla klientów, dlatego wprowadza się języki wyrażania zamówień
    - możliwe jest jednoczesne dopasowanie większej ilości ofert pomimo że żadna para ofert nie pasuje; np. gracz 1 obstawia „A > B”, gracz 2 obstawia „B > C”, gracz 3 obstawia „C > A”
  - ogólnie problem *płynności rynku* (ang. *liquidity*): czy oferty kupna/sprzedarzy „spotykają się”
- Problem płynności rozwiązuje się wprowadzając centralnego bukmachera, z którym klienci rynku robią interesy (zamiast wymieniać się między sobą)

Są trzy typy rynków predykcyjnych:

1. Rynki przyjmujące zgłoszenia i ustalające tranzakcję pomiędzy pewną liczbą klientów jak tylko znajdzie się dopasowanie
2. Rynki gromadzące zakłady, w których każdy gracz wrzuca do puli wybraną przez siebie kwotę, i na koniec pula jest „sprawiedliwie” dzielona pomiędzy zwyciężców
3. Rynki w których gracz natychmiast zawiera tranzakcję z bukmacherem, z ustaloną w momencie tranzakcji wypłatą zależną tylko od rezultatu zakładu

2 Pożądane własności rynków, rynki (2)

Zbalansowany budżet (budget-balance). Rynek nie generuje zysków ani strat.

Anonimowość (anonymity). Wypłaty nie zależą od tożsamości graczy.

Wierność (truthfulness). Gracze maksymalizują swoją wypłatę obstawiając dokładnie prawdziwy rezultat; ogólnie, gracze maksymalizują oczekiwaną wypłatę podejmując ruch zgodny z intencją bukmachera. (Uwaga: w kontekscie modelu MSR równoważna własność nazywa się *properness*.)

Normalność (normality). Zmiana zakładu gracza nie powoduje zmian wypłat pozostałych graczy zgodnych co do znaku ze zmianą wypłaty gracza zmieniającego zakład.

Rozdwojenio-odporność (sybilproofness). Dla dowolnego zbioru graczy obstawiających to samo, jeśli zamienimy ich na dowolną ilość innych graczy też to obstawiających i mających taką samą sumę wpłat, to nie zmieni to wypłat pozostałych graczy oraz suma wypłat nowych graczy będzie równa sumie wypłat zastępowanych graczy.

Jednostkowa racjonalność (individual rationality). Każdy gracz, dla każdego rozkładu rezultatów i wpłaty, ma obstawienie takie, że dla dowolnych wpłat i obstawień innych graczy, jego oczekiwana wypłata jest niezerowa.

Monotoniczność (monotonicity). Oczekiwana wypłata jest zawsze ściśle rosnąca względem wpłaty.

Mechanizm obstawiania ma wszystkie te własności wtedy i tylko wtedy, gdy wypłaca średnią ważoną względem ściśle poprawnej funkcji oceniającej:

Twierdzenie 1. *Mechanizm ostawiania jest* budget-balanced, anonymous, truthful, normal, sybilproof *wtedy i tylko wtedy gdy dla wpłat $\bar{m}$ wypłaty są zadane funkcją*

$$\Pi_i(\bar{r}, \bar{m}, \omega) = m_i + m_i\left(s^M(r_i, \omega) - \frac{1}{M}\sum_j m_j s^M(r_j, \omega)\right)$$

gdzie $M := \sum_j m_j$ oraz s^M jest ściśle poprawną funkcją oceniającą [TODO: dodać definicję] (patrz strictly proper scoring rule *poniżej) (oraz gładką z wartościami w* $[0,1]$*).*

Ciekawym zagadnieniem którego nie zdążymy omówić, jest interpretacja *truthfulness* dla rynków typu (3), oraz rynków typu (2) ze składaniem zamówień podzielonym na (np. dwa lub trzy) etapy. Mechanizmy definiuje się zwykle na bazie „poprawności" (*properness*), dzięki czemu są one „krótkowzrocznie wierne" (*myopically incentive compatible*): gracz optymalizuje oczekiwaną wygraną względem swojej wiedzy podając swoje oszacowanie prawdziwej wartości, ale *ignorując* wpływ swojego zamówienia na innych graczy. Przy pewnych strukturach informacji i oszacowania początkowego bukmachera, korzystniejsze dla gracza może być blefowanie.

3 Rynki dynamiczne (3)

Automatyczne mechanizmy bukmachera, różniące się pod względem „przyjazności dla użytkownika":

- **Market Scoring Rules**: reguła oceniająca $\bar{s}$ odwzorowuje rozkład prawdopodobieństwa $\bar{p}$ do wyniku $s_i(\bar{p})$ dla każdego rezultatu $i \in \{1, ..., N\}$ przewidywanego zdarzenia. Rynek startuje z oszacowaniem $\bar{p}_0$, i klient składający ofertę zmiany stanu rynku z $\bar{p}$ na $\bar{p}'$, zgadza się ponieść koszt $s_k(\bar{p})$ w zamian za zysk $s_k(\bar{p}')$ gdy zdarzenie okaże się mieć rezultat k. Reguła jest poprawna (ang. *proper scoring rule*), jeśli $E_{\bar{p}} s_i(\bar{p}) \geqslant E_{\bar{p}} s_i(\bar{p}') \forall \bar{p}$, $\bar{p}'$ (ściśle – *strictly* – jeśli równość wtw. gdy $\bar{p} = \bar{p}'$). Podstawowe warianty:
  - reguła logarytmiczna LMSR: $s_i(\bar{p}) = b\log(p_i)$
  - reguła kwadratowa: $s_i(\bar{p}) = b\left(2p_i - \sum_{i=1}^N p_i^2\right)$
- **Cost Function Based Markets**: zarządca rynku sprzedaje „akcje" (papiery wartościowe) dla każdego rezultatu $i \in \{1, ..., N\}$. Akcja zdarzenia i wypłaca \$1 jeśli zdarzenie i zachodzi, i nic w.p.p. Gdy na rynku jest $\bar{q}$ akcji, klient chcący nabyć $\bar{a}$ akcji płaci $C(\bar{q} + \bar{a}) - C(\bar{q})$. Definiujemy cenę chwilową

  $$p_i = \frac{\partial C(\bar{q})}{\partial q_i}$$

  Funkcja kosztu C jest poprawna (ang. *valid cost function*) gdy

  $$\forall i, \bar{q} : p_i(\bar{q}) \geqslant 0 \ \wedge \ \forall \bar{q} : \sum_{i=1}^N p_i(\bar{q}) = 1$$

  Podstawowy wariant (reguła logarytmiczna LMSR): $C(\bar{q}) = b\log\sum_{i=1}^N e^{q_i/b}$.
- **Sequential Convex Pari-Mutuel Mechanism**: oferty/zamówienia składają się z:
  - granicznej ceny π – maksymalna cena jednostkowa klient jest skłonny zapłacić
  - granicznej ilości l – maksymalna ilość udziałów pojedynczego rezultatu
  - zero-jedynkowego wektora zamówienia $\bar{a}$ – którymi rezultatami klient jest zainteresowany

  Zarządca ustala ilość udziałów do sprzedania x oraz cenę zamówienia rozwiązując:

  $$\max_{x,z,\bar{s}} \pi x - z + u(\bar{s})$$

z warunkami brzegowymi

$$\bar{a}\,x+\bar{s}\,+\bar{q}\,=z\,\bar{1}$$

$$0\leqslant x\leqslant l$$

- $\bar{q}$ – ilość akcji/udziałów na rynku (przed nadejściem zamówienia)
- z – zmienne górne ograniczenie na ilość akcji pojedynczego rezultatu (po zrealizowaniu zamówienia)
  - $\pi\,x-z$ to „worst-case” zysku bukmachera na tranzakcji
  - $\bar{s}$ to „slack variables”
  - $u(\bar{s}\,)$ to składnik regularyzujący (zmniejsza wahania cen)
- koszt sprzedanej ilości udziałów $\bar{p}$ pochodzi z optymalnego rozwiązania problemu dualnego (tzw. koszt marginalny więzów $\bar{a}\,x+\bar{s}\,+\bar{q}\,=z\,\bar{1}$): klient płaci $\bar{p}^{\top}\bar{a}$
  - p_i oznacza zysk w $\max_{x,z,\bar{s}}\pi\;x\,-\,z\,+\,u(\bar{s}\,)$ do uzyskania z zamiany $a_i\,x+s_i+q_i=z$ na $a_i\,x+s_i+q_i=z+1$ dla optymalnych $x,z,\bar{s}$

Podstawowy wariant (reguła logarytmiczna): $u(\bar{s}\,)=\sum_i\,\theta_i\log(s_i)$

4 Zagadnienia optymalizacji

4.1 Dualność w programowaniu wypukłym

Mamy problem optymalizacji

$$\begin{array}{rll} \text{minimalizuj} & f_0(\bar{x}\,) & \\ \text{pod warunkami} & f_i(\bar{x}\,)\leqslant 0 & i=1,\ldots,m \\ & h_i(\bar{x}\,)=0 & i=1,\ldots,p \end{array} \tag{1}$$

z optimum $p^*=f_0(\bar{x}^{\,*})$. Relaksujemy więzy wprowadzając kary za ich przekroczenie: definiujemy *Lagrangian*

$$L(\bar{x}\,,\bar{\lambda}\,,\bar{\nu}\,)=f_0(\bar{x}\,)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_if_i(\bar{x}\,)+\sum_{i=1}^{p}\nu_ih_i(\bar{x}\,)$$

gdzie $\bar{\lambda}\,,\bar{\nu}$ nazywają się *zmiennymi dualnymi* lub *współczynnikami Lagrange'a*, a *funkcja dualna* to

$$g(\bar{\lambda}\,,\bar{\nu}\,)=\inf_{\bar{x}}\;L(\bar{x}\,,\bar{\lambda}\,,\bar{\nu}\,)$$

Dla dowolnych $\bar{\lambda}\,\geqslant\bar{0}$ i $\bar{\nu}$ mamy $g(\bar{\lambda}\,,\bar{\nu}\,)\leqslant p^*$: jeśli $\bar{x}$ jest punktem dopuszczalnym, to

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_if_i(\bar{x}\,)+\sum_{i=1}^{p}\nu_ih_i(\bar{x}\,)\leqslant 0$$

Problem dualny Lagrange'a to wyciągnąć najlepsze dolne ograniczenie z tego faktu:

$$\begin{array}{rl} \text{maksymalizuj} & g(\bar{\lambda}\,,\bar{\nu}\,) \\ \text{pod warunkami} & \bar{\lambda}\,\geqslant\bar{0} \end{array} \tag{2}$$

Problem programowania wypukłego to zadanie minimalizacji funkcji wypukłej / maksymalizacji funkcji wklęsłej f_0 z wypukłymi ograniczeniami (zbiorami) $f_i(\bar{x}\,)\leqslant 0$ oraz liniowymi ograniczeniami $h_i(\bar{x}\,)=0$. Problem dualny Lagrange'a zawsze jest wypukły w tym sensie.

Niech $\bar{x}^{\,*}$ będzie rozwiązaniem (1), a $\bar{\lambda}^{\,*}$, $\bar{\nu}^{\,*}$ rozwiązaniem (2). Gdy $f_0(\bar{x}^{\,*})\,=\,g(\bar{\lambda}^{\,*},\,\bar{\nu}^{\,*})$, mówimy o *silnej dualności*. Jeśli problem *prymarny* (1) jest wypukły i np. istnieje punkt $\bar{x}$ t.że $f_i(\bar{x}\,)<0$ dla wszystkich f_i nieliniowych (*warunek Slatera*), to silna dualność zachodzi.

Gry o sumie zerowej Weźmy grę z sumą zerową o macierzy P. Załóżmy, że strategia mieszana gracza pierwszego $\bar{u}$ jest znana graczowi drugiemu. Zadanie gracza pierwszego to

$$\begin{array}{rl} \text{minimalizuj} & t \\ \text{pod warunkami} & \bar{u} \geqslant \bar{0},\ \bar{1}^\top \bar{u} = 1 \\ & P^\top \bar{u} \leqslant t\,\bar{1} \end{array}$$

Na odwrót, załóżmy że strategia mieszana gracza drugiego $\bar{v}$ jest znana graczowi pierwszemu. Gracz drugi wybiera

$$\begin{array}{rl} \text{maksymalizuj} & \nu \\ \text{pod warunkami} & \bar{v} \geqslant \bar{0},\ \bar{1}^\top \bar{v} = 1 \\ & P\bar{v} \geqslant \nu\,\bar{1} \end{array}$$

Lagrangian gwarantowanej straty pierwszego gracza to

$$t + \bar{\lambda}^\top\big(P^\top \bar{u} - t\,\bar{1}\big) - \bar{\mu}^\top \bar{u} + \nu\big(1 - \bar{1}^\top \bar{u}\big) = \nu + \big(1 - \bar{1}^\top \bar{\lambda}\big)t + \big(P\bar{\lambda} - \nu\,\bar{1} - \bar{\mu}\big)^\top \bar{u}$$

i jego funkcja dualna

$$g(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \nu) = \begin{cases} \nu & \bar{1}^\top \bar{\lambda} = 1,\ P\bar{\lambda} - \nu\,\bar{1} = \bar{\mu} \\ -\infty & \text{w p.p.} \end{cases}$$

czyli problem dualny to

$$\begin{array}{rl} \text{maksymalizuj} & \nu \\ \text{pod warunkami} & \bar{\lambda} \geqslant \bar{0},\ \bar{1}^\top \bar{\lambda} = 1,\ \bar{\mu} \geqslant 0 \\ & P\bar{v} - \nu\,\bar{1} = \bar{\mu} \end{array}$$

Eliminując $\bar{\mu}$, dla $\bar{\lambda} = \bar{v}$ dostajemy problem drugiego gracza. Z silnej dualności optymalne wartości gry obydwóch graczy są równe.

Dowód silnej dualności dla warunku Slatera polega na pokazaniu $L(\bar{x}, \bar{\lambda}^*, \bar{\nu}^*) = p^*$ dla $\bar{\lambda}^* = \mu\ \bar{\lambda}'$, $\bar{\nu}^* = \mu\ \bar{\nu}'$, gdzie $(\bar{\lambda}',\ \bar{\nu}',\ \mu)$ to wektor normalny hiperpłaszczyzny separującej zbiory wypukłe

$$\mathcal{A} = \{(\bar{u}, \bar{v}, t) | \exists \bar{x}\ f_i(\bar{x}) \leqslant u_i, i = 1...m, h_i(\bar{x}) = v_i, i = 1...p, f_0(\bar{x}) \leqslant t\}$$

oraz $\mathcal{B} = \big\{(\bar{0}, \bar{0}, s) \big| s < p^*\big\}$.

Interpretacja cenowa Niech $\bar{x}$ oznacza parametry przedsiębiorstwa, $f_0(\bar{x})$ koszty minus zysk, a więzy $f_i(\bar{x}) \leqslant 0$ oznaczają ograniczenia na zasoby. Wyobraźmy sobie, że ograniczenia mogą być naruszone, z kosztem jednostkowym λ_i, a także że nadmiar zasobu może być odsprzedany po cenie λ_i. Teraz całkowity koszt przedsiębiorstwa okazuje się równy Lagrangianowi $L(\bar{x}, \bar{\lambda})$. Optymalna wartość dualna $g(\bar{\lambda}^*)$ to koszt poniesiony w najbardziej niekorzystnych warunkach cenowych. Jeśli zachodzi silna dualność, optymalne $\bar{\lambda}^*$ to ceny zasobów przy których przedsiębiorstwo nie zarobi więcej ani sprzedając, ani dokupując zasoby.

4.1.1 Warunki optymalności Karusha-Kuhna-Tuckera

Przy silnej dualności mamy $f_0(\bar{x}^*) = f_0(\bar{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(\bar{x}^*) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(\bar{x}^*)$, więc $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(\bar{x}^*) = 0$. Ponieważ $\lambda_i^* f_i(\bar{x}^*) \leqslant 0$, więc $\lambda_i^* f_i(\bar{x}^*) = 0$. Załóżmy dodatkowo, że $f_0, ..., f_m$, $h_1, ..., h_p$ są różniczkowalne. Pochodna $\nabla_{\bar{x}} L(\bar{x}, \bar{\lambda}^*, \bar{\nu}^*)$ zeruje się w $\bar{x}^*$. Podsumowując, razem z dopuszczalnością rozwiązań $\bar{x}^*$ i $\bar{\lambda}^*, \bar{\nu}^*$, dostajemy konieczne dla optymalności warunki KKT:

$$f_i(\bar{x}^*) \leqslant 0, i = 1...m \tag{3}$$
$$h_i(\bar{x}^*) = 0, i = 1...p \tag{4}$$
$$\lambda_i^* \geqslant 0, i = 1...m \tag{5}$$
$$\lambda_i^* f_i(\bar{x}^*) = 0, i = 1...m \tag{6}$$
$$\nabla_{\bar{x}} f_0(\bar{x}^*) + \sum_{i=1}^m \nabla_{\bar{x}} \lambda_i^* f_i(\bar{x}^*) + \sum_{i=1}^p \nabla_{\bar{x}} \nu_i^* h_i(\bar{x}^*) = 0 \tag{7}$$

Jeśli problem prymarny jest wypukły i zachodzi silna dualność, to warunki KKT są dostateczne dla optymalności $\bar{x}^*$ i $\bar{\lambda}^*$, $\bar{\nu}^*$: ponieważ $\bar{\lambda}^* \geqslant 0$, $L(\bar{x}, \bar{\lambda}^*, \bar{\nu}^*)$ jest wypukła względem $\bar{x}$, więc osiąga minimum w $\bar{x}^*$. Stąd $g(\bar{\lambda}^*, \bar{\nu}^*) = L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*, \bar{\nu}^*)$, ale z (4) i (6) $L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*, \bar{\nu}^*) = f_0(\bar{x}^*)$.

Program wypukły Eisenberga-Gale'a W modelu rynku Fishera z liniowymi użytecznościami, mamy $j = 1...n$ różnych podzielnych dóbr oraz $i = 1...n'$ kupujących. Użyteczność jednostki j dla i wynosi u_{ij}. Niech $u_i := \sum_{j=1}^n u_{ij} x_{ij}$ będzie łączną użytecznością pozyskaną przez i z nabycia x_{ij} produktu j. Niech kupujący i dysponuje kapitałem e_i, bez straty ogólności załóżmy że na rynku jest jednostkowa ilość każdego z dóbr, tzn. przy sprzedaniu wszystkich dóbr $\bar{x}$ mamy $\sum_{i=1}^{n'} x_{ij} = 1$.

Chcemy znaleźć *market clearing prices*: ceny przy których kupujący maksymalizując swoją użyteczność wykorzystają całą gotówkę na nabycie dóbr. Na bazie interpretacji cenowej, znajdziemy je rozwiązując problem dualny do maksymalizacji użyteczności. Intuicja: aby zmotywować kupujących do wykorzystania całej gotówki, maksymalizujemy średnią łącznych użyteczności ważoną kapitałami kupujących. Funkcję celu programu Eisenberga-Gale'a konstruujemy tak, aby ani liniowe przeskalowanie użyteczności jednego kupującego, ani rozdzielenie gotówki jednego kupującego pomiędzy dwóch nowych o takich samych użytecznościach, nie zmieniało rozwiązania: średnia geometryczna spełnia to. Przechodząc do logarytmu:

$$\begin{array}{rll} \text{maksymalizuj} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n'} e_i \log u_i & \text{gdzie } u_i := \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_{ij} \\ \text{pod warunkami} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n'} x_{ij} \leqslant 1 & \forall j \\ & x_{ij} \geqslant 0 & \forall i, j \end{array}$$

Następujące warunki są konieczne i dostateczne na optymalność w programie Eisenberga-Gale'a:

1. $\forall j: p_j \geqslant 0$.
2. $\forall j: p_j > 0 \Rightarrow \sum_i x_{ij} = 1$.
3. $\forall i, j: \frac{u_{ij}}{p_j} \leqslant \frac{\sum_j u_{ij} x_{ij}}{e_i}$.
4. $\forall i, j: x_{ij} > 0 \Rightarrow \frac{u_{ij}}{p_j} = \frac{\sum_j u_{ij} x_{ij}}{e_i}$.

Sprowadzamy program Eisenberga-Gale'a do postaci standardowej definiując

$$\begin{aligned} f_0(\bar{x}) &= -\sum_{i=1}^{n'} e_i \log u_i \\ f_k(\bar{x}) = f_j(\bar{x}) &= \sum_{i=1}^{n'} x_{ij} - 1,\ k = 1...n \\ f_k(\bar{x}) = f_{ij}(\bar{x}) &= -x_{ij},\ k = n' + 1, ..., n' + n n' \end{aligned}$$

dla $m = n' + n n'$, $p = 0$.

Zadanie: pokaż równoważność ww. warunków 1.-4. warunkom KKT (3-7) dla $\bar{x}^* = \bar{x}$, $\overline{\lambda_k}^*_{k=1...n} = \bar{p}$, $\overline{\lambda_k}^*_{k>n} = \overline{\lambda_{ij}}^*(\bar{x}, \bar{p})$.

Model SCPM Znajdziemy warunki KKT dla problemu

$$\begin{array}{rl} \max\limits_{x, z, \bar{s}} & \pi x - z + u(\bar{s}) \\ \text{z warunkami} & \bar{a} x + \bar{s} + \bar{q} = z \bar{1} \\ & 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon \end{array} \tag{8}$$

i popatrzymy na własności wektora cen $\bar{p}(\varepsilon)$.

Lemat 2.

1. *Wektor cen* $\bar{p}(\varepsilon)$ *sumuje się do jedynki:* $\bar{1}^\top \bar{p}(\varepsilon) = 1$.

2. *Ceny są nieujemne jeśli funkcja użyteczności $u(\cdot)$ jest niemalejąca.*
3. *Łączna cena chwilowa $\bar{p}(\varepsilon)^\top \bar{a}$ jest niemalejąca względem ε.*
4. *Funkcja cen jest całkowalna.*

Niech $\bar{p}$, ξ, y będą zmiennymi dualnymi do więzów $\bar{h}(x, z, \bar{s}) = \bar{a}\, x + \bar{s} + \bar{q} - z\, \bar{1}$, $f_1(x) = -x$, $f_2(x) = x - \varepsilon$; optymalizujemy $f_0(x, z, \bar{s}) = -\pi\, x + z - u(\bar{s})$.

$$
\begin{aligned}
-x^* &\leqslant 0 && (9)\\
x^* - \varepsilon &\leqslant 0 &&\\
\bar{a}\, x^* + \bar{s}^* + \bar{q} - z^*\, \bar{1} &= 0 && (10)\\
\xi^* &\geqslant 0 && (11)\\
y^* &\geqslant 0 &&\\
\xi^*\,(-x^*) &= 0 && (12)\\
y^*\,(x^* - \varepsilon) &= 0 &&\\
-\nabla_{\bar{s}} u(\bar{s}^*) + \bar{p}^* &= 0 && (13)\\
-\pi - \xi^* + y^* + \bar{p}^{*\top} \bar{a} &= 0 &&\\
1 + \bar{p}^{*\top}(-\bar{1}) &= 0 &&
\end{aligned}
$$

skąd wynika

$$
\begin{aligned}
\bar{p}^{*\top}\, \bar{1} &= 1\\
\bar{p}^* &= \nabla_{\bar{s}} u(\bar{s}^*)\\
y^* + \bar{p}^{*\top} \bar{a} &\geqslant \pi\\
y^* &\geqslant 0\\
y^*\,(\varepsilon - x^*) &= 0\\
\bar{a}\, x^* + \bar{q} + \bar{s}^* &= z^*\, \bar{1}
\end{aligned}
$$

Teraz niech $(x^*, z^*, \bar{s}^*) = (x_1, z_1, \bar{s}_1), (x_2, z_2, \bar{s}_2)$ będą optymalnymi wartościami więzów dla $\varepsilon = \varepsilon_1$, ε_2. Z wklęsłości u:

$$
\begin{aligned}
u\big(z_2\, \bar{1} - \bar{q} - x_2\, \bar{a}\big) - u\big(z_1\, \bar{1} - \bar{q} - x_1\, \bar{a}\big) &\leqslant \nabla u\big(z_1\, \bar{1} - \bar{q} - x_1\, \bar{a}\big)\big((z_2 - z_1)\, \bar{1} - (x_2 - x_1)\bar{a}\big)\\
u\big(z_1\, \bar{1} - \bar{q} - x_1\, \bar{a}\big) - u\big(z_2\, \bar{1} - \bar{q} - x_2\, \bar{a}\big) &\leqslant \nabla u\big(z_2\, \bar{1} - \bar{q} - x_2\, \bar{a}\big)\big((z_1 - z_2)\, \bar{1} - (x_1 - x_2)\bar{a}\big)
\end{aligned}
$$

czyli

$$
\big(\nabla u\big(z_1\, \bar{1} - \bar{q} - x_1\, \bar{a}\big) - \nabla u\big(z_2\, \bar{1} - \bar{q} - x_2\, \bar{a}\big)\big)^\top \big((z_1 - z_2)\, \bar{1} - (x_1 - x_2)\bar{a}\big) \geqslant 0
$$

ale z warunków KKT:

$$
\nabla u\big(z_1\, \bar{1} - \bar{q} - x_1\, \bar{a}\big)^\top \bar{1} = 1, \nabla u\big(z_2\, \bar{1} - \bar{q} - x_2\, \bar{a}\big)^\top \bar{1}
$$

więc

$$
\big(\nabla u\big(z_1\, \bar{1} - \bar{q} - x_1\, \bar{a}\big) - \nabla u\big(z_2\, \bar{1} - \bar{q} - x_2\, \bar{a}\big)\big)^\top \bar{a} \geqslant 0
$$

Całkowalność wynika z ograniczoności i monotoniczności na domkniętym przedziale całkowania.

4.1.2 Zaburzenia i analiza czułości

Rozpatrujemy zaburzony problem

$$
\begin{array}{rll}
\text{minimalizuj} & f_0(\bar{x}) & \\
\text{pod warunkami} & f_i(\bar{x}) \leqslant u_i & i = 1, \ldots, m\\
& h_i(\bar{x}) = v_i & i = 1, \ldots, p
\end{array}
\qquad (14)
$$

Wprowadźmy

$$
p^*(\bar{u}, \bar{v}) = \inf\{f_0(\bar{x}) | \exists \bar{x} : f_i(\bar{x}) \leqslant u_i, i = 1 \ldots m, h_i(\bar{x}) = v_i, i = 1 \ldots p\}
$$

gdzie $p^*(\bar{u}, \bar{v}) = \infty$ dla niespełnialnego układu (14). Zakładając silną dualność mamy dla każdego dopuszczalnego $\bar{x}$

$$p^*(0,0) = g(\bar{\lambda}^*, \bar{\nu}^*) \leqslant f_0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i^* h_i(\bar{x}) \leqslant f_0(\bar{x}) + \bar{\lambda}^{*\top} \bar{u} + \bar{\nu}^{*\top} \bar{v}$$

skąd wynika

$$p^*(\bar{u}, \bar{v}) \geqslant p^*(\bar{0}, \bar{0}) - \bar{\lambda}^{*\top} \bar{u} - \bar{\nu}^{*\top} \bar{v}$$

Załóżmy teraz dodatkowo, że $p^*(\bar{u}, \bar{v})$ jest różniczkowalne w $(\bar{0}, \bar{0})$. Biorąc

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{p^*(t\,\bar{e_i}, \bar{0}) - p^*(\bar{0}, \bar{0})}{t} = \lim_{t \to 0^-} \frac{p^*(t\,\bar{e_i}, \bar{0}) - p^*(\bar{0}, \bar{0})}{t} = \frac{\partial p^*(\bar{0}, \bar{0})}{\partial u_i}$$

i korzystając z

$$\frac{p^*(t\,\bar{e_i}, \bar{0}) - p^*(\bar{0}, \bar{0})}{t} \geqslant -\lambda_i^* \text{ dla } t > 0, \frac{p^*(t\,\bar{e_i}, \bar{0}) - p^*(\bar{0}, \bar{0})}{t} \leqslant -\lambda_i^* \text{ dla } t < 0$$

oraz podobnie dla $\bar{\nu}$, mamy

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(\bar{0}, \bar{0})}{\partial u_i}, \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(\bar{0}, \bar{0})}{\partial v_i}$$

Shadow prices Tutaj interpretację cenową optymalnych zmiennych dualnych widać bezpośrednio: $\bar{\lambda}^*$, $\bar{\nu}^*$ to zysk przedsiębiorstwa na jednostkę zmiany odpowiedniego więzu-zasobu (przy niewielkiej zmianie).

4.2 Progamowanie liniowe: metoda elipsoid

Założenia upraszczające: mamy dane a_0 takie, że $\mathcal{S}(a_0, r) \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{S}(a_0, R)$, tzn. zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest zwarty i pełnego wymiaru, ze znanym punktem wewnętrznym. Algorytm polega na przycinaniu elipsoidy zawierającej zbiór wszystkich punktów lepszych od dotychczas znalezionych, startując od $\mathcal{S}(a_0, R)$. Potrzebujemy podprocedur:

- sprawdzania dopuszczalności punktu
- generowania hiperpłaszczyzny separującej punkt niedopuszczalny i zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathcal{K}$
- znajdowania najmniejszej elipsoidy zawierającej przecięcie elipsoidy i pół-przestrzeni

5 Równoważność mechanizmów i regret minimization

5.1 Rynek predykcyjny z ograniczonymi stratami bukmachera równoważny algorytmowi uczenia *no-regret*

5.1.1 Konstrukcja rynku predykcyjnego

Będziemy dzielić zamówienia na kawałki, tak, żeby pojedyncza ilość udziałów nie przekraczała ε, i te małe kawałki będziemy sprzedawać „liniowo” po cenie chwilowej. Liczba kroków dla realizacji zamówień będzie więc proporcjonalna do $\frac{1}{\varepsilon}$.

Niech $p_{i,t} \in [0, 1]$ – cena chwilowa udziału i, $q_{i,t} \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ – ilość udziałów i nabytych w chwili t, $Q_{i,t}$ – ilość udziałów i na rynku (nabytych do chwili t). Definiujemy chwilową stratę

$$l_{i,t} = \frac{\varepsilon - q_{i,t}}{\eta b}$$

poprawną dla $\eta \geqslant 2\varepsilon / b$. Użyjemy uczenia *Weighted Majority* z wykładniczymi wagami

$$w_{i,t} = \frac{w_{i,t-1} e^{-\eta l_{i,t}}}{\sum_{j=1}^{n} w_{j,t-1} e^{-\eta l_{i,t}}} = \frac{e^{-\eta L_{i,t}}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-\eta L_{j,t}}}$$

otrzymując

$$p_{i,t} = \frac{e^{Q_{i,t}/b}}{\sum_{j=1}^n e^{Q_{j,t}/b}} = \frac{e^{2\varepsilon t/b - \eta L_{i,t}}}{\sum_{j=1}^n e^{2\varepsilon t/b - \eta L_{i,t}}} = \frac{e^{-\eta L_{i,t}}}{\sum_{j=1}^n e^{-\eta L_{j,t}}} = w_{i,t}$$

Używając twierdzenia o ograniczonym niezadowoleniu dla *Weighted Majority* z parametrem η:

$$L_{\mathcal{A},T} - \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} L_{i,T} \leqslant \eta T + \frac{\ln(\eta)}{\eta}$$

otrzymujemy biorąc $\eta = 2\varepsilon/b$:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n p_{i,t} l_{i,t} - \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} \sum_{t=1}^T l_{i,t} &\leqslant \eta T + \frac{\ln(\eta)}{\eta} \\
\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n -\frac{1}{\eta b} p_{i,t} q_{i,t} + \frac{1}{\eta b} \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \sum_{t=1}^T q_{i,t} &\leqslant \eta T + \frac{\ln(\eta)}{\eta} + \sum_{t=1}^T \frac{2\varepsilon}{\eta b} \sum_{i=1}^n p_{i,t} - \sum_{t=1}^T \frac{2\varepsilon}{\eta b} \\
\max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \sum_{t=1}^T q_{i,t} - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n p_{i,t} q_{i,t} &\leqslant 4\varepsilon^2 T b + b \ln(n)
\end{aligned}$$

Ponieważ $T = O(1/\varepsilon)$, w granicy dla $\varepsilon \to 0$, worst-case strata bukmachera to $b \ln(n)$.

5.1.2 Konstrukcja algorytmu uczenia

Weźmy mechanizm bukmachera *cost function based market*. Definiujemy algorytm predykcji

$$w_{i,t} = p_i\big(-\varepsilon \bar{L}_{t-1}\big)$$

gdzie p_i to cena chwilowa udziału-rezultatu-eksperta i.

Mówimy, że ceny chwilowe $\bar{p}$ są φ-stabilne, jeśli są ciągłe i kawałkami różniczkowalne, i ich pochodne są ograniczone:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial p_i(\bar{q}\,)}{\partial q_j} \right| \leqslant \varphi$$

(jeśli dana pochodna nie istnieje w danym punkcie, bierzemy dla niej 0 w powyższej sumie).

Lemat 3. *Niech C będzie dowolną poprawną funkcją kosztu z φ-stabilnymi cenami. Dla dowolnych $\varepsilon > 0, \bar{q}$ oraz $\bar{r}$ t.że $|r_i| \leqslant \varepsilon$*

$$\left| (C(\bar{q} + \bar{r}\,) - C(\bar{q}\,)) - \sum_{i=1}^N p_i(\bar{q}\,)\, r_i \right| \leqslant \frac{\varepsilon^2 \varphi}{2}$$

Twierdzenie 4. *Niech C będzie dowolną poprawną funkcją kosztu z φ-stabilnymi cenami. Niech straty mechanizmu bukmachera będą ograniczone przez B. Niech $\mathcal{A}$ będzie algorytmem uczenia z wagami $w_{i,t}$ dla $\varepsilon = \sqrt{2B/(\varphi T)}$. Wtedy dla dowolnych strat $l_{i,t} \in [0,1]$ po T krokach*

$$L_{\mathcal{A},T} - \min_{i \in \{1,\ldots,N\}} L_{i,T} \leqslant \sqrt{2B\varphi T}$$

Dowód. Niech $r_{i,t} = -\varepsilon\, l_{i,t}$ będzie ilością udziałów i nabytych w chwili t. Niech $q_{i,t} = \sum_{\tau=1}^t r_{i,\tau}$ to ilość udziałów na rynku. Waga eksperta $w_{i,t} = p_i(-\varepsilon \bar{L}_{t-1}) = p_i(\bar{q}_{t-1})$.

Z definicji

$$\max_{i \in \{1,\ldots,N\}} \sum_{t=1}^T r_{i,t} - \sum_{t=1}^T (C(\bar{q}_t) - C(\bar{q}_{t-1})) \leqslant B$$

Z lematu otrzymujemy

$$\max_{i \in \{1,\ldots,N\}} \sum_{t=1}^T r_{i,t} - \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i=1}^N p_i(\bar{q}_{t-1})\, r_{i,t} + \frac{\varepsilon^2 \varphi}{2} \right) \leqslant B$$

Podstawiając $p_i(\bar{q}_{t-1}) = w_{i,t}$ i $r_{i,t} = -\varepsilon\, l_{i,t}$

$$\max_{i\in\{1,\ldots,N\}} \sum_{t=1}^{T} (-\varepsilon\, l_{i,t}) - \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N} w_{i,t}\,(-\varepsilon\, l_{i,t}) \leqslant B + \frac{\varepsilon^2 \varphi T}{2}$$

czyli (ponieważ wagi są znormalizowane)

$$L_{\mathcal{A},T} - \min_{i\in\{1,\ldots,N\}} L_{i,T} = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N} w_{i,t}\, l_{i,t} - \max_{i\in\{1,\ldots,N\}} \sum_{t=1}^{T} l_{i,t} \leqslant \frac{B}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon \varphi T}{2}$$

Wystarczy wziąć $\varepsilon\sqrt{B/(\varphi T)}$. □

5.2 Równoważność Market Scoring Rules i Cost Function Markets

Lemat 5. *Funkcja kosztu C jest poprawna (*valid cost function*) wtw. gdy spełnia*

1. różniczkowalność*: wszystkie pochodne cząstkowe $\frac{\partial C(\bar{q})}{\partial q_i}$ istnieją dla wszystkich $\bar{q}$*
2. monotoniczność*: $\bar{q} \geqslant \bar{q}\,' \Rightarrow C(\bar{q}) \geqslant C(\bar{q}\,')$*
3. dodatnia niezmienniczość na translacje*: $C(\bar{q} + k\,\bar{1}) = C(\bar{q}) + k$*

Dowód. Różniczkowalność oznacza istnienie funkcji ceny $p_i(\bar{q})$, monotoniczność oznacza $p_i(\bar{q}) \geqslant 0$.

Niezmienniczość na translacje jest równoważna sumowaniu się cen do jedności:
Załóżmy $\sum_{i=1}^{N} p_i(\bar{q}) = 1\, \forall \bar{q}$. Zdefiniujmy $\bar{u}(a) = \bar{q} + a\,\bar{1}$. Wtedy

$$\begin{aligned} C(\bar{q} + k\,\bar{1}) - C(\bar{q}) &= \int_0^k \frac{dC(\bar{q} + a\,\bar{1})}{da} da = \int_0^k \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial C(\bar{u})}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial a} da \\ &= \int_0^k \sum_{i=1}^{N} p_i(\bar{u}) da = k \end{aligned}$$

Teraz załóżmy niezmienniczość na translacje. Dla dowolnie ustalonego $\bar{q}\,'$ zdefiniujmy $\bar{q} = \bar{q}\,' + k\,\bar{1}$ (lub dla danego $\bar{q}$ znajdźmy $\bar{q}\,' = \bar{q} - k\,\bar{1}$).

$$1 = \frac{\partial\big(C(\bar{q}\,') + k\,\bar{1}\big)}{\partial k} = \frac{\partial C(\bar{q})}{\partial k} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial C(\bar{q})}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial k} = \sum_{i=1}^{N} p_i(\bar{q})$$

□

Lemat 6. *C jest poprawną funkcją kosztu (*valid cost function*) wtw. gdy jest różniczkowalna i może być przedstawiona jako*

$$C(\bar{q}) = \sup_{\bar{p}\in\Delta_N}\left(\sum_{i=1}^{N} p_i q_i - \alpha(\bar{p})\right)$$

dla wypukłej dolno-półciągłej $\alpha\colon \Delta_N \to (-\infty, \infty]$.

Lemat wynika z zastosowania twierdzenia o reprezentacji *convex risk measures* z matematyki finansowej do lematu 5.

Lemat 7. *Funkcje ceny $p_i(\bar{q}) = \frac{\partial C(\bar{q})}{\partial q_i}$ dla funkcji $C(\bar{q}) = \sup_{\bar{p}\in\Delta_N}\left(\sum_{i=1}^{N} p_i q_i - \alpha(\bar{p})\right)$ z wypukłą dolno-półciągłą $\alpha\colon \Delta_N \to (-\infty, \infty]$ to właśnie rozkłady $\bar{p}$ maksymalizujące $\sum_{i=1}^{N} p_i q_i - \alpha(\bar{p})$.*

Dowód. $f(\bar{q}, \bar{p}) := \sum_{i=1}^{N} p_i q_i - \alpha(\bar{p})$ jest wklęsła, ma optimum globalne na $\bar{p} \in \Delta_N$. Oznaczmy je $\bar{p}^*(\bar{q})$. Weźmy $\bar{q}\,' = (q_1, \ldots, q_i', \ldots, q_N)$. Mamy

$$f(\bar{q}\,', \bar{p}^*(\bar{q})) - f(\bar{q}, \bar{p}^*(\bar{q})) \leqslant C(\bar{q}\,') - C(\bar{q})$$

z maksymalności $C(\bar{q}\,')$. Dzieląc przez $q_i' - q_i$ i przechodząc do granicy osobno dla $q_i' \to q_i+$ („od prawej") i $q_i' \to q_i-$ („od lewej") dostajemy tezę. □

Lemat 8. *Strata bukmachera nie przekracza*

$$\sup_{\bar{p},\bar{p}'\in\Delta_N} (\alpha(\bar{p}) - \alpha(\bar{p}'))$$

Definicja 9. *Dane machanizmy rynkowe MSR i CFBM są równoważne na D, gdy gracz, który zmienia prawdopodobieństwa na rynku MSR z $\bar{r}$ na $\bar{r}'$, otrzyma tą samą wypłatę, co gracz, który nabywa udziały na rynku CFBM zmieniając ilość udziałów na rynku z $\bar{q}$ do $\bar{q}'$ tak, że ceny $\bar{p}(\bar{q}) = \bar{r}$ oraz $\bar{p}(\bar{q}') = \bar{r}'$ dla wszystkich $\bar{r}, \bar{r}' \in D$.*

Dla rynku CFBM z funkcją kosztu C, przez α_C oznaczmy funkcję z reprezentacji C z lematu 6.

Twierdzenie 10. *Jest odpowiedniość 1-na-1 i „na” pomiędzy rynkami CFBM z ściśle wypukłą różniczkowalną funkcją α_C oraz MSR ze ściśle poprawną, regularną ($\sum_{i=1}^N p_i s_i(\bar{p}') \in [-\infty, \infty) \wedge \sum_{i=1}^N p_i s_i(\bar{p}) \in (-\infty, \infty) \forall \bar{p}, \bar{p}' \in \Delta_N$) regułą oceniającą $\bar{s}$, zadana przez:*

$$\begin{aligned}\alpha_C(\bar{p}) &= \sum_{i=1}^N p_i s_i(\bar{p}) \\ s_i(\bar{p}) &= \alpha_C(\bar{p}) - \sum_{j=1}^N \frac{\partial\alpha_C(\bar{p})}{\partial p_j} p_j + \frac{\partial\alpha_C(\bar{p})}{\partial p_i}\end{aligned}$$

oraz ta odpowiedniość jest równoważnością na zbiorze dodatnich cen w sensie definicji 9; każdy wektor prawdopodobieństw $\bar{p}$ osiągalny w MSR jest wektorem cen osiągalnym w CFBM.

Dowód korzysta z faktów:

- reguła oceniająca jest ściśle poprawna tylko gdy $\sum_{i=1}^N p_i s_i(\bar{p})$ jest ściśle wypukła
- twierdzenie o reprezentacji dla regularnych ściśle poprawnych reguł oceniających:

  $$s_i(\bar{p}) = G(\bar{p}) - \sum_{j=1}^N p_j \dot{G}_j(\bar{p}) + \dot{G}_i(\bar{p})$$

  gdzie $\dot{G}_j$ to subpochodna, tzn. dla G różniczkowalnej $\dot{G}_j(\bar{p}) = \frac{\partial G(\bar{p})}{\partial p_j}$
- optymalność $\bar{p}(\bar{q})$ oznacza, że pochodne lagrangianu

  $$L = \left(\sum_{i=1}^N p_i q_i - \alpha_C\right) - \lambda\left(\sum_{i=1}^N p_i - 1\right) + \sum_{i=1}^N \mu_i p_i$$

  gdzie $\mu_i(\bar{q}) = 0$ dla $p_i(\bar{q}) > 0$, zerują się: $\partial L / \partial p_i = 0$.

5.2.1 Algorytmy uczenia *Follow the Regularized Leader*

Obszerną klasę algorytmów uczenia *no-regret* można przedstawić jako algorytm wybierający wagi minimalizujące

$$\sum_{i=1}^N w_{i,t} L_{i,t-1} + \frac{1}{\eta}\mathcal{R}(\bar{w}_t)$$

Korzystając z twierdzenia 4 i lematu 8, możemy oszacować niezadowolenie takich algorytmów.

Twierdzenie 11. *Niech C będzie poprawną wypukłą funkcją kosztu z φ-stabilnymi cenami, taką że $\alpha_C(\bar{w}) = \mathcal{R}(\bar{w})$ dla algorytmu FTRL ze znormalizowanymi wagami. Ustalając ε (odpow. η) na $\sqrt{2\sup_{\bar{p},\bar{p}'\in\Delta_N}(\alpha_C(\bar{p}) - \alpha_C(\bar{p}'))/(\varphi T)}$ w algorytmie z twierdzenia 4 (odpowiednio w FTRL), otrzymujemy*

$$L_{\mathcal{A},T} - \min_{i\in\{1,\ldots,N\}} L_{i,T} \leqslant \sqrt{2T\varphi \sup_{\bar{p},\bar{p}'\in\Delta_N} (\alpha_C(\bar{p}) - \alpha_C(\bar{p}'))}$$

5.3 Równoważność Cost Function Based Markets i Convex Pari-Mutuel Mechanisms

Okazuje się, że oryginalny mechanizm SCPM nie jest „truthful” (ćwiczenia). Poprawioną wersję można wyprowadzić na dwa sposoby, jeden z nich pozostawimy na ćwiczenia. Zauważ, że model MSR jest w sposób oczywisty „truthful” bądź „proper” dla odpowiednio dobranej funkcji oceniającej, model CFBM dla odpowiedniej funkcji α_C jest „truthful” jako równoważny MSR. Skonstruujemy wariant SCPM wzorowany na CFBM. Niech $\bar{p}(\varepsilon)$ będą cenami marginalnymi dla

$$\begin{array}{rl} \max\limits_{x,z,\bar{s}} & \pi x - z + u(\bar{s}) \\ \text{z warunkami} & \bar{a} x + \bar{s} + \bar{q} = z\bar{1} \\ & 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon \end{array} \tag{15}$$

oraz niech x^* będzie rozwiązaniem oryginalnego problemu, czyli powyższego programu dla $\varepsilon = l$. Cenę dla klienta ustalmy, zamiast $\bar{p}(l)$, jako $\left(\int_0^{x^*} \bar{p}(\varepsilon) d\varepsilon\right)^\top \bar{a}$. Zauważ, że podział zamówienia na części (z aktualizacją $\bar{q}$ po zrealizowaniu każdej z części) nie zmienia wypłaty gracza w nowym sformułowaniu.

Lemat 12. *Optymalne zmienne dualne $\bar{p}(\varepsilon)$ problemu (15) są również optymalne dla problemu*

$$\begin{array}{rl} \max\limits_{z,\bar{s}} & \pi \varepsilon - z + u(\bar{s}) \\ \textit{z warunkami} & \bar{a}\varepsilon + \bar{s} + \bar{q} = z\bar{1} \end{array} \tag{16}$$

Dowód. Problem dualny dla (15) to

$$\begin{array}{rl} \max\limits_{\bar{p},\lambda,\mu} \inf\limits_{x,z,\bar{s}} & -\pi x + z - u(\bar{s}) - \lambda x + \mu(x - \varepsilon) + \bar{p}^\top \left(\bar{a} x + \bar{s} + \bar{q} - z\bar{1}\right) \\ \text{pod warunkiem} & \bar{p} \geqslant \bar{0}, \lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0 \end{array}$$

Problem dualny dla (16) to

$$\begin{array}{rl} \max\limits_{\bar{p}} \inf\limits_{z,\bar{s}} & -\pi \varepsilon + z - u(\bar{s}) + \bar{p}^\top \left(\bar{a}\varepsilon + \bar{s} + \bar{q} - z\bar{1}\right) \\ \text{pod warunkiem} & \bar{p} \geqslant 0 \end{array}$$

Z warunków KKT $\lambda^* x^* = 0$ i $\mu(x^* - \varepsilon^*) = 0$. Dla dopuszczalnych wartości zmiennych prymarnych i dualnych mamy $\inf_{0 \leqslant x \leqslant \varepsilon}\left(-\pi x + z - u(\bar{s}) + \bar{p}^\top\left(\bar{a} x + \bar{s} + \bar{q} - z\bar{1}\right)\right) = -\pi\varepsilon + z - u(\bar{s}) + \bar{p}^\top\left(\bar{a}\varepsilon + \bar{s} + \bar{q} - z\bar{1}\right)$. □

Twierdzenie 13. *Jeśli $\bar{q}$ jest ilością udziałów na rynku SCPM, i nowe zamówienie $(\pi, l, \bar{a})$ jest zaakceptowane do poziomu x^*, to opłata wynosi*

$$\left(\int_0^{x^*} \bar{p}(\varepsilon)\, d\varepsilon\right)^\top \bar{a} = C(\bar{q} + \bar{a} x^*) - C(\bar{q})$$

gdzie C jest funkcją wypukłą zadaną przez

$$C(\bar{q}) = \min_t t - u(t\bar{e} - \bar{q})$$

i ma własność $\bar{1}^\top \nabla C(\bar{q}) = 1, \forall \bar{q} \geqslant 0$.

Dowód. Niech $V(\bar{q}, \varepsilon)$ będzie rozwiązaniem (16).

$$V(\bar{q}, \varepsilon) = \pi\varepsilon - \min_z\left(z - u(z\bar{e} - \bar{q} - \bar{a}\varepsilon)\right) = \pi\varepsilon - C(\bar{q} + \bar{a}\varepsilon)$$

Z analizy czułości mamy

$$p_i(\varepsilon) = -\frac{\partial V(\bar{q}, \varepsilon)}{\partial q_i} = \frac{\partial C(\bar{q} + \bar{a}\varepsilon)}{\partial q_i} \tag{17}$$

Całkując

$$\begin{aligned}\int_0^{x^*} \bar{p}\,(\varepsilon)^\top \bar{a}\, d\varepsilon &= \int_0^{x^*} \nabla_{\bar{q}} C(\bar{q} + \bar{a}\,\varepsilon)^\top \bar{a}\, d\varepsilon \\ &= \int_0^{x^*} \frac{d\,C(\bar{q} + \bar{a}\,\varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon = C(\bar{q} + \bar{a}\,x^*) - C(\bar{q})\end{aligned}$$

$\bar{1}^\top \nabla C(\bar{q})$ z (17) oznacza sumowanie się cen do jedności, które mamy z lematu 2. □

Twierdzenie 14. *Dowolny model CFBM może być sformułowany jako SCPM z wklęsłą funkcją użyteczności* $u(\bar{s}) = -C(-\bar{s})$*, i modele te są równoważne w sensie opłat za zamówienia.*

Dowód. Z własności funkcji kosztu mamy $u(\bar{s}) = z - C(z\,\bar{1} - \bar{s})$ oraz problem optymalizacji modelu SCPM:

$$\begin{aligned}\max_{x,z,\bar{s}} \quad & \pi\,x - C(z\,\bar{1} - \bar{s}) \\ \text{z warunkami} \quad & z\,\bar{1} - \bar{a}\,x - \bar{s} = \bar{q} \\ & 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

z warunkami KKT:

$$\begin{aligned}\bar{p}^{\top}\bar{a} + y &\geqslant \pi \\ x\,(\bar{p}^{\top}\bar{a} + y - \pi) &= 0 \\ p_i &= \frac{\partial C(\bar{q} + \bar{a}\,x)}{\partial q_i} \\ y\,(l - x) &= 0 \\ y \geqslant 0 \qquad & 0 \leqslant x \leqslant l\end{aligned}$$

czyli ilość x jest zwiększana aż cena do zapłaty $\bar{p}^{\top}\bar{a}$ zrówna się z oferowaną π lub x zrówna się z limitem l. Dzieląc zamówienie na drobne części $l = \varepsilon \to 0$, otrzymujemy $p_i = \frac{\partial C(\bar{q})}{\partial q_i}$. □

Twierdzenie 15. *Jeśli pochodna funkcji użyteczności SCPM* ∇u *przebiega cały sympleks* $\{\bar{r}\,|\bar{e}^{\top}\bar{r} = 1, \bar{r} \geqslant 0\}$*, to odpowiadająca jej funkcja kosztu* C *definiuje CFBM którego równoważny model MSR ma poprawne funkcje oceny (reguły oceniające).*

Dowód. Reguła oceniająca $s_i(\,\cdot\,)$ jest poprawna gdy $\arg\max_{\bar{p}} \sum_i r_i\, s_i(\bar{p}) = \bar{r}$. Dla rynków opartych o funkcję kosztu, reguła oceniająca jest domyślnie dana przez:

$$\begin{aligned}s_i(\bar{p}) &= q_i - C(\bar{q}) + K \\ \text{gdzie } p_i &= \frac{\partial C}{\partial q_i}(\bar{q}) \\ \\ \bar{p} &= \arg \sup_{\bar{p} \in \Delta_N} \left(\sum_{i=1}^{N} p_i q_i - \alpha(\bar{p}) \right) \\ p_i d q_i &= dC(\bar{q})\end{aligned}$$

Czyli warunek poprawności to

$$\begin{gathered}\nabla C(\bar{q}^{\,*}) = \bar{r} \\ \text{gdzie} \quad \bar{q}^{\,*} \in \arg\max_{\bar{q} \geqslant \bar{0}} \sum_i r_i\,(q_i - C(\bar{q}))\end{gathered}$$

(zauważ że oznacza to zgodność interesów klientów z „prawdomównością” ich zamówień). Warunki KKT powyższej optymalizacji to

$$r_i - \frac{\partial C}{\partial q_i}(\bar{q}^{\,*}) + \eta_i^* = 0, \eta_i^* \geqslant 0, q_i^* \geqslant 0, \eta_i^*\, q_i^* = 0$$

Zadanie maksymalizacji wyraża się przez funkcję użyteczności jako

$$\begin{aligned}
&\max_{\bar q \geqslant \bar 0} \sum_i r_i \Big(q_i - \min_t \big(t - u\big(t\,\bar 1 - \bar q\,\big)\big)\Big) \\
\Leftrightarrow\ &\max_{\bar q \geqslant \bar 0, t} \sum_i r_i \big(q_i - t + u\big(t\,\bar 1 - \bar q\,\big)\big) \\
\Leftrightarrow\ &\max_{\bar q \geqslant \bar 0, t} \bar r^{\,\top} \big(\bar q\, - t\,\bar 1\big) + u\big(t\,\bar 1 - \bar q\,\big) \\
\Leftrightarrow\ &\max_{\bar s} u(\bar s\,) - \bar r^{\,\top} \bar s
\end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równoważności $\bar s\, = t\,\bar 1 - \bar q\,$. Dla rozwiązania $\bar s^{\,*}$, t^* można dobrać na tyle duże, że $\bar q^{\,*} > 0$). Wtedy z warunków KKT ($\bar\eta^{\,*} = 0$) mamy $\nabla C(\bar q^{\,*}) = \bar r$, bo $\nabla u(\bar s^{\,*}) = \bar r$. □

6 Złożoność i mechanizmy dla rynków kombinatorycznych

Skupimy się na przewidywaniu permutacji (czyli skończonych porządków liniowych), na dwóch językach wyrażania zakładów:

1. **subset betting**: zakład stwierdza na jakim zbiorze pozycji zakończy dany kandydat, lub jaki zbiór kandydatów zakończy na danej pozycji
2. **pair betting**: zakład wybiera dwóch kandydatów i stwierdza który zajmie lepszą pozycję

6.1 P- i NP-złożoność dopasowywania ofert, rynki (1)

- **matching decision problem**: zbiór zamówień $\mathcal{O} \ni (b_i,\, q_i,\, \varphi_i)$ gdzie b_i to oferta cenowa klienta, q_i ilość udziałów w rezultacie φ_i jaką klient jest zainteresowany

$$\begin{aligned}
\text{znajdź} \quad & \sum_i (b_i - I_i(s)) q_i x_i \geqslant 0, \quad \forall s \in \mathcal{S} \\
x_i \in \{0,1\} \text{ (indiv.)} \quad & \text{lub } 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \text{ (divisible)}, \ \ \forall (b_i, q_i, \varphi_i) \in \mathcal{O}
\end{aligned}$$

- **optimal matching problem**: zbiór zamówień $\mathcal{O} \ni (b_i,\, q_i,\, \varphi_i)$ gdzie b_i to oferta cenowa klienta, q_i ilość udziałów w rezultacie φ_i jaką klient jest zainteresowany

$$\begin{aligned}
\max_{x_i, c} \quad & c \\
\text{takie, że} \quad & \sum_i (b_i - I_i(s)) q_i x_i \geqslant c, \quad \forall s \in \mathcal{S} \\
x_i \in \{0,1\} \text{ (indiv.)} \quad & \text{lub } 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \text{ (divisible)}, \ \ \forall (b_i, q_i, \varphi_i) \in \mathcal{O}
\end{aligned}$$

6.1.1 Subset betting

Udział $\langle \alpha | \Phi \rangle$ wypłaca \$1 jeśli pozycja(α) $\in$ Φ i \$0 w.p.p. Udział $\langle \Psi | j \rangle$ wypłaca \$1 jeśli pozycja(Ψ) $= \{j\}$ i \$0 w.p.p.

Twierdzenie 16. Optimal divisible matching *dla problemu* subset betting *jest wielomianowy.*

Dowód. Rozwiążemy program liniowy $\sum_i (b_i - I_i(s)) q_i x_i \geqslant c$ metodą elipsoid. Wystarczy, że będziemy potrafić znajdować niespełniony więz $\sum_i I_i(s) q_i x_i < \big(\sum_i b_i q_i x_i\big) - c$, jeśli istnieje. Zredukujemy to zadanie do znajdowania największego ważonego skojarzenia w grafie dwudzielnym.

Tworzymy graf dwudzielny pomiędzy kandydatami i pozycjami, z krawędzią jeśli dany kandydat i pozycja współwystępują w zamówieniu. Wagami są sumy wartości $q_i x_i$ po i przebiegających zamówienia zawierające danego kandydata i pozycję. Każdy stan s odpowiada doskonałemu skojarzeniu. Jednocześnie, strata bukmachera to suma wag skojarzenia $\sum_i I_i(s) q_i x_i$. Ponieważ $\big(\sum_i b_i q_i x_i\big) - c$ jest stałe względem s, mamy wielomianowy algorytm na znajdowanie niespełnionego więzu (lub stwierdzenie, że rozwiązanie jest dopuszczalne). □

6.1.2 Pair betting

Udział $\langle \alpha > \beta \rangle$ wypłaca \$1 jeśli pozycja(α) $<$ pozycja(β) i \$0 w.p.p.

Fakt, że *pair betting* ma $n(n-1)$ akcji mógłby sugerować, że problem dopasowywania zamówień jest prostszy niż przy *subset betting*, które ma wykładniczą ilość akcji. Jednak zarówno niepodzielny, jak i podzielny przypadek *pair betting* są NP-trudne.

Lemat 17. *Jeśli bukmacher akceptuje zamówienia z grafu skierowanego $H(V, E)$ z ceną krawędzi $b_e = (1-\varepsilon)$ i wagą krawędzi $x_e = 1$, to dochód worst-case wynosi $k(H) - \varepsilon|E|$, gdzie $k(H)$ jest rozwiązaniem* weighted minimum feedback arc set problem *na H.*

Twierdzenie 18. *Znajdowanie optymalnego worst-case dochodu w* indivisible pair betting *jest NP-trudne.*

Lemat 19. *Dla grafu ważonego $H(V, E)$, usunięcie krawędzi e z wagą x_e z grafu zmniejsza rozwiązanie* weighted minimum feedback arc set *$l(H)$ o nie więcej niż x_e i zmniejsza rozwiązanie* unweighted minimum feedback arc problem *$k(H)$ o nie więcej niż 1.*

Twierdzenie 20. *Znajdowanie optymalnego dopasowania zamówień dla* indivisible pair betting *jest NP-trudne.*

Lemat 21. *Jeśli bukmacher akceptuje zamówienia z grafu skierowanego $H(V, E)$ z wagą krawędzi x_e, to dochód worst-case bukmachera wynosi*

$$c(H) = \sum_{e\in E} (b_e - 1)x_e + l(H)$$

Lemat 22. *$l(G^*) \leqslant k(G^*) \leqslant k(G)$, gdzie G to oryginalny graf zamówień, a G^* to graf zamówień dla optymalnego dopasowania.*

Lemat 23. *Istnieje ε takie, że gdy wszystkie ceny krawędzi b_e są $(1-\varepsilon)$, to $l(G^*) = k(G)$.*

Twierdzenie 24. *Znajdowanie optymalnego worst-case dochodu w* divisible pair betting *jest NP-trudne.*

Lemat 25. *Jeśli graf H spełnia $l(H) = k(H)$ i usuniemy z niego krawędź z wagą $x_e < 1$, to $k(H - \{e\}) = k(H)$.*

Twierdzenie 26. *Znajdowanie optymalnego dopasowania zamówień dla* divisible pair betting *jest NP-trudne.*

6.1.3 Wielomianowy dostateczny warunek istnienia dopasowania w *pair betting*

Lemat 27. *Warunkiem dostatecznym na istnienie dopasowania dla* pair betting *(zarówno podzielnego jak i niepodzielnego) jest istnienie cyklu C w G t.że*

$$\sum_{e\in C} b_e \geqslant |C| - 1$$

gdzie $|C|$ to ilość krawędzi w cyklu C.

Dowód. Lewa strona to wpływy bukmachera. Ponieważ cykl oznacza sprzeczność zamówień (z przechodności i antyzwrotności), co najmniej jedno zamówienie w cyklu nie będzie wypłacone. □

Lemat 28. *W czasie wielomianowym można znaleźć cykl z największym dochodem worst-case:*

$$\max_{C\in\mathcal{C}} \left(\sum_{e\in C} b_e - (|C| - 1) \right)$$

gdzie $\mathcal{C}$ to zbiór wszystkich cykli w G.

Dowód. Ponieważ

$$\sum_{e\in C} b_e - (|C| - 1) = \sum_{e<C} (b_e - 1) + 1 = 1 - \sum_{e<C} (1 - b_e)$$

wystarczy znaleźć najkrótszy cykl w grafie $H(V, E)$ z krawędziami o wagach $(1 - b_e)$. Algorytmem najkrótszej ścieżki można znaleźć najkrótszy cykl (pętlę) przechodzący przez dany wierzchołek, powtarzamy to dla wszystkich wierzchołków grafu. □

Algorytm zachłanny nie poradzi sobie ze znajdowaniem optymalnych dopasowań bazujących na przeplatających się cyklach (tzn. w przypadku, gdy cykle z osobna są stratne, ale łącznie dają dochód bukmacherowi), ale można by mieć nadzieję, że poradzi sobie w sytuacji, gdy optymalne dopasowanie składa się z rozłącznych cykli. Niestety, łatwo skonstruować przykład, gdzie krótki cykl blokuje możliwość znalezienia wielu odrobinę dłuższych cykli.

Lemat 29. *Algorytm zachłanny, iterujący znajdowanie i usuwanie najkrótszego cyklu, daje co najwyżej $O(\sqrt{n})$-aproksymację największej liczby rozłącznych cykli.*

6.2 #P-trudność ustalania cen dla problemów kombinatorycznych

Startując od sformułowania *cost function based markets*, rozpatrzmy zbiór złożonych udziałów Θ, złożony udział $S \in \Theta$ wypłaca \$1 gdy zajdzie dowolny z rezultatów $\omega \in S$. Niech $Q = (q_S)_{S\in\Theta}$ będzie liczbą akcji na rynku. Wtedy funkcja kosztu to

$$C(Q) = b \log \sum_{\omega\in\Omega} e^{\sum_{S\in\Theta:\omega\in S} q_S/b} = b \log \sum_{\omega\in\Omega} \prod_{S\in\Theta:\omega\in S} e^{q_S/b}$$

Cena chwilowa złożonego udziału okazuje się sumą cen udziałów rezultatów składowych:

$$\begin{aligned} p_S(Q) &= \frac{\partial C(Q)}{\partial S} \\ &= \frac{\sum_{\omega\in S} \prod_{S'\in\Theta:\omega\in S'} e^{q_{S'}/b}}{\sum_{\tau\in\Omega} \prod_{S'\in\Theta:\omega\in S'} e^{q_{S'}/b}} \\ &= \frac{\sum_{\omega\in S} e^{\sum_{S'\in\Theta:\omega\in S'} q_{S'}/b}}{\sum_{\tau\in\Omega} e^{\sum_{S'\in\Theta:\omega\in S'} q_{S'}/b}} \\ &= \frac{\sum_{\omega\in S} e^{q_\omega/b}}{\sum_{\tau\in\Omega} e^{q_\tau/b}} \end{aligned}$$

6.2.1 Subset betting

Wystarczy ograniczyć się do udziałów postaci $\langle i, j\rangle$, ponieważ $\langle \Psi, j\rangle$ oraz $\langle i, \Phi\rangle$ są ich sumą. Cena chwilowa

$$p_{i,j}(Q) = \frac{\sum_{\sigma\in\Omega:\sigma(i)=j} \prod_{k=1}^n e^{q_{k,\sigma(k)}/b}}{\sum_{\tau\in\Omega} \prod_{k=1}^n e^{q_{k,\tau(k)}/b}}$$

oraz funkcja kosztu

$$C(Q) = b \log \sum_{\sigma\in\Omega} \prod_{k=1}^{n} e^{q_{k,\sigma(k)}/b}$$

Twierdzenie 30. *Obliczanie cen chwilowych $p_{i,j}(Q)$ oraz funkcji kosztu $C(Q)$ dla* subset betting *jest #P-trudne.*

Dowód bazuje na redukcji wielomianowej z problemu obliczania permanenta dowolnej macierzy o wartościach $\{0, 1\}$, tj. funkcji $\sum_{\sigma\in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ dla $a_{i,j} \in \{0, 1\}$, o której wiadomo że jest #P-trudna.

6.2.2 Pair betting

Niech $q_{i,j}$ oznacza ilość udziałów $\langle i > j\rangle$ na rynku. Mamy

$$p_{i,j}(Q) = \frac{\sum_{\sigma\in\Omega:\sigma(i)<\sigma(j)} \prod_{i',j':\sigma(i')<\sigma(j')} e^{q_{i',j'}/b}}{\sum_{\tau\in\Omega} \prod_{i',j':\tau(i')<\tau(j')} e^{q_{i',j'}/b}}$$

oraz

$$C(Q) = b \log \sum_{\sigma \in \Omega} \prod_{i,j:\sigma(i)<\sigma(j)} e^{q_{i,j}/b}$$

Twierdzenie 31. *Obliczanie cen chwilowych $p_{i,j}(Q)$ oraz funkcji kosztu $C(Q)$ dla* pair betting *jest #P-trudne.*

Dowód bazuje na redukcji z problemu liczby liniowych (tzn. totalnych) rozszerzeń dowolnego (częściowego) porządku, o którym wiadomo że jest #P-trudny.

6.3 Uczenie minimalizujące niezadowolenie względem optymalnej permutacji

6.3.1 Aproksymacja cen problemu *Subset Betting* w czasie wielomianowym

6.4 Wielomianowość ustalania cen dla turniejów