

Lista 1

termin: 12-03-2013

Zadanie 1 (2p.)

Zbadaj, które z poniższych formuł mają dowody w logice intuicjonistycznej i udowodnij je w Coqu używając wyłącznie taktyk `assumption`, `intro`, `apply`, `absurd` (lub ich wariantów). Następnie z pozostałych formuł wybierz te, które można udowodnić w logice klasycznej i udowodnij je w Coqu używając powyższych taktyk oraz aksjomatów logiki klasycznej.

Aby móc wnioskować klasycznie w Coqu, można skorzystać z biblioteki `Classical` (komenda `Require Import Classical.`), która zawiera deklaracje m.in. aksjomatu *tertium non datur* czy eliminacji podwójnego zaprzeczenia:

`Axiom classic : forall P : Prop, P ∨ ~ P.`

`Lemma NNPP : forall P : Prop, ~~ P → P.`

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$
4. $A \rightarrow \neg\neg A$
5. $\neg\neg A \rightarrow A$
6. $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$
7. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow A$
8. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$
9. $((((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow B$
10. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow A \rightarrow C$

Zadanie 2 (2p.)

Sprawdź, które z poniższych formuł logiki pierwszego rzędu można udowodnić konstruktywnie. Możesz potrzebować dodatkowo następujących taktyk:

- `exists t` – taktyka dla reguły wprowadzenia kwantyfikatora egzystencjalnego; `t` jest termem, dla którego instancjujemy kwantyfikator w przesłance reguły

- **destruct id** – taktyka dla reguły eliminacji kwantyfikatora egzystencjalnego z przesłanki; **id** jest nazwą przesłanki

Przyjmij następujące deklaracje formuł atomowych $A(x, y)$, $B(x)$, C :

```
Parameter S T : Set.
Parameter A : S -> T -> Prop.
Parameter B : T -> Prop.
Parameter C : Prop.
```

Wówczas term Galliny postaci **A x y** reprezentuje formułę $A(x, y)$. Formułę $\exists x. A(x, y)$ zapiszemy jako term **exists x, A x y**.

1. $\exists x. \forall y. A(x, y) \rightarrow \forall x. \exists y. A(x, y)$
2. $\neg \forall x. B(x) \rightarrow \exists x. \neg B(x)$
3. $\exists x. \neg B(x) \rightarrow \neg \forall x. B(x)$
4. $\neg \exists x. B(x) \rightarrow \forall x. \neg B(x)$
5. $\forall x. \neg B(x) \rightarrow \neg \exists x. B(x)$
6. $(C \rightarrow \exists x. B(x)) \rightarrow \exists x. (C \rightarrow B(x))$
7. $\exists x. (C \rightarrow B(x)) \rightarrow C \rightarrow \exists x. B(x)$
8. $\exists x. \forall y. (B(x) \rightarrow B(y))$

Zadanie 3 (3p.)

Sformułuj w języku logiki pierwszego rzędu następującą wypowiedź:

Każdy cyrulik sewilski goli tych wszystkich mężczyzn w Sewilli, którzy się sami nie golą. Ale nie goli żadnego z tych, którzy golą się sami.

Następnie pokaż prawdziwość twierdzenia (twierdzenie logiki intuicjonistycznej czy klasycznej?):

A zatem w Sewilli nie ma ani jednego mężczyzny będącego cyrulikiem.

Jakie założenia dotyczące reprezentacji przyjmujesz, aby móc udowodnić powyższe stwierdzenie?

Przykład o cyruliku pochodzi ze strony http://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=Logika_dla_informatykov.

Zadanie 4 (2p.)

Udowodnij prawa de Morgana dla logiki zdań (używając wyłącznie taktyk bazowych).

Zadanie 5 (2p.)

Sprawdź, jak działa taktyka `auto n`, gdzie n jest liczbą naturalną. Następnie skonstruuj formułę, której nie da się dowieść za pomocą taktyki `auto 4`, ale można jej dowieść za pomocą taktyki `auto 5`. Uogólnij to rozwiązanie dla dowolnych `auto n`, `auto n+1`?