Streszczenie

W rozprawie doktorskiej rozważamy kilka problemów z obszaru optymalizacji kombinatorycznej. W pierwszej części rozprawy badamy problemy związane ze skojarzeniem rango-maksymalnym (ang. rank-maximal matching), w drugiej binarny wariant problemu kafelkowania prostokątami.

W problemie skojarzenia rango-maksymalnego dany jest graf dwudzielny $G = (A \cup P, E)$, w którym A oznacza zbiór aplikantów, P - posad oraz każda krawędź (a, p) ma rangę odpowiadającą temu, jak bardzo aplikant a jest zainteresowany posadą p. Mniejsza liczba oznacza większe zainteresowanie. Dopuszczalne są remisy tzn. dany aplikant a może tak samo oceniać kilka posad. Zadanie polega na obliczeniu skojarzenia *rango-maksymalnego*, czyli takiego, w którym maksymalna liczba aplikantów otrzymuję posadę o randze 1 oraz pod tym warunkiem maksymalna liczba aplikantów otrzymuje posadę o randze 2 itd. Znany wcześniej algorytm znajduje skojarzenie rango-maksymalne w czasie $\mathcal{O}(\min(n, c\sqrt{n})m)$, gdzie n oznacza liczbę wierzchołków w grafie, m liczbę krawędzi, a c oznacza maksymalną wartość rangi w rozwiązaniu optymalnym.

W Sekcji 3 zajmujemy się dynamiczną wersją problemu skojarzenia rango-maksymalnego, w której chcemy utrzymywać skojarzenie rango-maksymalne po dodaniu wierzchołka do grafu. Przedstawiamy algorytm, który aktualizuje istniejące skojarzenie rango-maksymalne w czasie $\mathcal{O}(min(c'n, n^2) + m)$, gdzie c' oznacza największą rangę krawędzi w rozwiązaniu optymalnym nowego grafu. Algorytm ten można łatwo zaadoptować do wersji, w której wierzchołek jest usuwany lub dodawana lub usuwana jest krawędź. Pokazujemy również jak zmodyfikować podany algorytm, aby działał dla wersji dynamicznej problemu skojarzenia popularnego. Aktualizacja popularnego skojarzenia odbywa się w czasie $\mathcal{O}(m)$. Wyniki zawarte w tej sekcji zostały zgłoszone do *SIAM Journal on Discrete Mathematics (SIDMA).*

W Sekcji 4 badamy kilka strategii manipulacji związanych ze skojarze-

niem rango-maksymalnym. Zakładamy, że jeden z aplikantów jest manipulantem. Zna on listy preferencji wszystkich pozostałych aplikantów i stara się sfalsyfikowac swoją listę preferencji tak, by zwiększyć swoją szansę uzyskania posady lepszej niż gdyby podał prawdziwą listę preferencji. Tworzymy kilka strategii manipulacyjnych odpowiadających różnym kryteriom. Rezultaty opisane w tej sekcji zostały opublikowane na konferencji *International Computing and Combinatorics Conference (COCOON 2018)*.

W drugiej części rozprawy rozważamy problemy binarnego kafelkowania prostokątami. Najbardziej znanym z nich jest problem RTile , w którym mamy daną prostokątną macierz o nieujemnych elementach i naturalną liczbę p, a zadanie polega na znalezieniu podziału tej macierzy na p rozłącznych prostokątnych podmacierzy zwanych *kafelkami* tak, aby zminimalizować maksymalną wagę kafelka. Waga kafelka to suma elementów w nim zawartych. W wariancie binarnym RTile elementy macierzy mają wartość 0 lub 1. Dla wersji binarnej RTile podajemy nowy algorytm aproksymacyjny, który jest najlepszym możliwym przy zastosowaniu używanego dotąd ograniczenia dolnego. Zaprezentowany algorytm rozszerzamy na problem dualny DRTile oraz wersje d-wymiarowe ($d > 2$). Zawartość tej sekcji została zgłoszona do czasopisma *Information Processing Letters (IPL)*.