

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: aktuarialno-finansowa

Iwo Gruca

Hedging naturalny rent życiowych

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Tomasza Rolskiego

Wrocław 2021

Spis treści

Wstęp	3
1 Podstawy pojęcia i fakty	5
1.1 Matematyka finansowa	5
1.2 Analiza przeżycia	6
1.3 Ubezpieczenia i renty życiowe	10
2 Model Lee-Cartera	12
2.1 Estymacja składników modelu	12
2.2 Kalibracja modelu	14
3 Metody hedgingu naturalnego	18
3.1 Opis portfela	18
3.2 Modelowanie opłacalności	21
3.3 Hedging poprzez czas	21
3.3.1 Metoda rezerwy	23
3.3.2 Metoda zwrotu	24
3.4 Hedging poprzez dziedzinę działalności	24
3.4.1 Metoda klasyczna	25
3.4.2 Swap śmiertelności	27
4 Eksperyment numeryczny	30
4.1 Model techniczny ewolucji śmiertelności	30
4.2 Symulacje całkowitych czasów trwania życia	34
4.3 Empiryczne wyniki dla pojedynczych scenariuszy w sytuacji braku hedgingu	34
4.4 Empiryczne wyniki w sytuacji braku hedgingu z rozkładem bezwarunkowym	38
4.5 Empiryczne wyniki strategii hedgingowych	38
4.5.1 Metoda rezerwy	38
4.5.2 Metoda zwrotu	39
4.5.3 Metoda klasyczna	39
4.5.4 Swap śmiertelności	40
5 Wnioski	41
Appendix	48
Spis rysunków	50
Spis tabel	51
Bibliografia	52

Wstęp

Renty życiowe, takie jak emerytury, stanowią jeden z finansowych filarów współczesnego społeczeństwa. Zakłady ubezpieczeniowe oferujące tego typu kontrakty muszą mierzyć się z wieloma przeszkodami takimi jak adekwatna wycena składki czy utrzymanie odpowiednich rezerw na przyszłe wypłaty. Wspomniane problemy są silnie powiązane z kwestią ewolucji śmiertelności w czasie.

Analiza danych empirycznych wskazuje, że oczekiwana długość życia przy urodzeniu rośnie zarówno w mocno jak i mniej rozwiniętych regionach świata [10]. Pociąga to za sobą przedłużenie stanu słabości, w tym zachorowalności i niepełnosprawności, wśród starszych osób, co wpływa negatywnie na jakość ich życia. W celu jej poprawy, mogą one wykupić sobie polisę dożywotniej renty, która przynajmniej częściowo będzie równoważyć zwiększone wydatki na leki lub rehabilitację. Firmy oferujące takie kontrakty często przy ich wycenie korzystają z deterministycznych tablic trwania życia. Jednak takie podejście nie uwzględnia dynamiki zmian w ewolucji śmiertelności w czasie. Ubezpieczyciel może w związku z tym niedoszacować długości trwania życia swoich klientów, co w najgorszym wypadku będzie skutkowało bankructwem. Spowoduje to zmniejszenie możliwości finansowych jego klientów, mając przez to negatywny wpływ na ich życie.

Ryzyko związane z opisaną wyżej sytuacją nazywa się ryzykiem długowieczności. Istnieje kilka sposobów na jego redukcję, w tym hedging naturalny, reasekuracja oraz transfer poprzez odpowiednie derywatywy. Celem niniejszej pracy jest formalny opis mechanizmu działania oraz metod pierwszego z wymienionych sposobów, tj. hedgingu naturalnego. Główna idea stojąca za tym podejściem polega na tym, że dany instrument finansowy bądź ubezpieczeniowy łączy się z instrumentem, który działa w stosunku do niego odwrotnie, przez co oba instrumenty znoszą się w pewnym stopniu. W przypadku rent życiowych głównym kandydatem na taki instrument zabezpieczający stanowi ubezpieczenie na życie.

W 1992 roku R. Lee oraz L. Carter wprowadzili w swoim artykule [8] stochastyczny model centralnego natężenia śmiertelności, co pozwoliło na rozwinięcie się dynamicznego podejścia do wyceny polis ubezpieczeniowych i rentowych. W 2009 roku E. Pitacco, M. Denuit, S. Haberman i A. Olivieri zaproponowali w swojej książce [11] podział hedgingu naturalnego rent życiowych na dwa rodzaje:

- hedging poprzez czas,
- hedging poprzez dziedzinę działalności,

w którym elementem rozróżniającym jest kwestia zależności wypłat kontraktów. W tej samej publikacji wprowadzili również dwie metody, które na potrzeby tej pracy nazwano metodą rezerwy i metodą zwrotu. Z kolei w 2007 roku S. Cox oraz Y. Lin w swoim artykule [5] opisali swap, będący derywatą natężenia śmiertelności, pozwalający osiągnąć hedging naturalny. Przy jego wycenie skorzystali oni z podejścia S. Wanga, w którym cena kontraktu stanowi wartość oczekiwaną jego zdyskontowanych wypłat względem miary neutralnej na ryzyko, tzw. \mathbb{Q} -miary, zdefiniowanej przy użyciu transformacji Wanga [16]. Taka metoda wyceny jest jednak trudna do zastosowania na rynku polis ubezpieczeniowych i rentowych, dlatego w niniejszej pracy zaproponowano wariant wykorzystujący miarę rzeczywistą, tzw. \mathbb{P} -miarę.

W pierwszym rozdziale pracy wprowadzono podstawowe definicje oraz fakty dotyczące matematyki finansowej, analizy przeżycia i matematyki aktuarialnej. W rozdziale drugim omówiony został model Lee-Cartera. Ponadto wyestymowano też jego charakterystyki na

podstawie danych dotyczących Polski dostępnych w Human Mortality Database [15]. W rozdziale trzecim opisano teorię stojącą za metodami hedgingu naturalnego, który na potrzeby niniejszej pracy jest zdefiniowany jako redukcja współczynnika zmienności wypłat z portfeli polis rentowych i ubezpieczeniowych. Rozdział czwarty dotyczy eksperymentu numerycznego, w którym przy pomocy symulacji zaprezentowano działanie wcześniej opisanych strategii redukcji ryzyka. Główne rozważania wieńczy sekcja, w której wykonano syntezę wyników wcześniej wspomnianego eksperymentu oraz na jej podstawie wysunięto ogólne wnioski. Do pracy dołączono Appendix, w którym przedstawiono własności warunkowej wartości oczekiwanej oraz warunkowej wariancji.

1 Podstawę pojęcia i fakty

W tym rozdziale wprowadzone zostaną podstawowe definicje i fakty wykorzystywane w dalszych częściach pracy. W Podrozdziale 1.1 opisane są terminy związane z matematyką finansową. W Podrozdziale 1.2 omówione są podstawy analizy przeżycia. Podrozdział 1.3 dotyczy zagadnień z matematyki aktuarialnej będącej syntezą dwóch wcześniej wspomnianych dziedzin. Zakłada się, że czytelnik zna podstawowe terminy i twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa, dlatego nie będą one tutaj omawiane.

1.1 Matematyka finansowa

Podstawową zasadą matematyki finansowej jest zmiana wartości pieniądza w czasie. Niech $P \in [0, +\infty)$ oznacza pewną liczbę pieniędzy w chwili 0. Niech $\delta \in \mathbb{R}$ będzie intensywnością oprocentowania w skali roku. Po n latach zaktualizowana wartość kapitału wynosi

$$F = Pe^{\delta n}.$$

Oczywiście, można też wyrazić P z wykorzystaniem F :

$$P = Fe^{-\delta n}.$$

Mówi się wtedy, że P to zdyskontowana na chwilę 0 wartość kapitału F , natomiast $e^{-\delta}$ to roczna stopa dyskonta.

Naturalnie, jeśli $m \in (n, n+1)$, to w chwili m kapitał końcowy wynosi $F = Pe^{\delta m}$. Taki model oprocentowania nazywa się modelem oprocentowania składanego z kapitalizacją ciągłą. Będzie zakładany w dalszej części pracy.

W praktyce ekonomicznej ważną rolę odgrywają renty, które są ciągiem płatności dokonywanych w równych odstępach czasu [12]. Matematycznie można je określić jako ciąg par

$$\langle x_n, y_n \rangle,$$

gdzie $x_n \in \mathbb{R}$ to wartości przepływów pieniężnych, a $y_n \in \mathbb{N}$ to momenty dokonywania płatności. Ponadto, dla każdego $m, n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$y_n - y_{n-1} = y_m - y_{m-1}.$$

Niech $y_0 = 0$ będzie chwilą początkową. Wtedy wartość renty w chwili y_0 można wyrazić jako

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n e^{-\delta y_n}.$$

W dalszych częściach pracy zakłada się równość $y_n = n$. Jeżeli dla pewnego $N \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(\forall n > N) \quad x_n = 0$$

to rentę nazywa się N -letnią. W przeciwnym wypadku mówi się o rencie wieczystej. Ponadto, jeśli $x_0 = 0$ to rentę nazywa się płatną z dołu, a jeśli $x_0 \neq 0$, to rentę nazywa się płatną z góry (dla N -letniej renty płatnej z góry zachodzi jeszcze równość $x_N = 0$).

Dla części rent istnieją ustandaryzowane oznaczenia na wartość zdyskontowanych jednostkowych płatności, które nazywa się też czynnikami dyskontowania rent [12]:

- n -letnia renta z dołu o jednostkowych wypłatach:

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{j=1}^n e^{-j\delta} = e^{-\delta} \frac{1 - e^{-\delta n}}{1 - e^{-\delta}};$$

- n -letnia renta z góry o jednostkowych wypłatach:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-j\delta} = \frac{1 - e^{-\delta(n-1)}}{1 - e^{-\delta}}.$$

Powyżej zaprezentowane renty nie mają losowych wypłat, więc nazywa się je pewnymi. Stanowią one punkt wyjścia przy opisie rent życiowych w Podrozdziale 1.3.

1.2 Analiza przeżycia

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Niech $T_{x,y}$ będzie nieujemną zmienną losową o rozkładzie zadany dystrybuantą $F_{x,y}(t)$ z ciągłą gęstością $f_{x,y}(t) = \frac{d}{dt}F_{x,y}(t)$. Zmienną losową $T_{x,y}$ interpretuje się jako przyszły czas trwania życia osoby w wieku x lat w roku kalendarzowym y . Dodatkowo rozważa się też zmienne $K_{x,y} = \lfloor T_{x,y} \rfloor$ oraz $S_{x,y} = T_{x,y} - \lfloor T_{x,y} \rfloor$, które stanowią, odpowiednio, całkowity oraz ułamkowy czas trwania życia. Dla uproszczenia treści, w dalszej części niniejszego podrozdziału wszystkie wielkości są rozważane dla odpowiednich lat kalendarzowych.

Prawdopodobieństwo, że x -latek umrze przed chwilą t jest oznaczone jako

$${}_tq_x(y) = F_{x,y}(t) = \mathbb{P}(T_{x,y} \leq t).$$

Prawdopodobieństwo zderzenia przeciwnego, tj. przeżycia przez x -latka więcej niż t , ma postać

$${}_tp_x(y) = 1 - F_{x,y}(t) = \mathbb{P}(T_{x,y} > t).$$

Rozważa się również prawdopodobieństwo, iż x -latek przeżyje s lat po czym umrze w przeciągu t lat. Oznacza się je jako

$${}_s{}_tq_x(y) = F_{x,y}(t+s) - F_{x,y}(s) = \mathbb{P}(s < T_{x,y} \leq s+t).$$

Niech $x = 0$ i $\omega = \min\{t : \forall x, y \mathbb{P}(T_{x,y} > t) = 0\}$, tzn. ω jest maksymalnym wiekiem, jaki można osiągnąć. Rozważmy ogon dystrybuanty zmiennej losowej $T_{0,y}$.

Definicja 1. [3] Funkcję $S_y : [0, \omega] \rightarrow [0, 1]$ o postaci

$$S_y(t) = 1 - F_{0,y}(t),$$

nazywa się funkcją przeżycia w roku kalendarzowym y .

Ważną obserwacją jest fakt, że zmienna losowa $T_{x,y}$ w naturalny sposób implikuje zajście zdarzenia $\{T_{0,y-x} > x\}$. Takie założenie oznacza podejście kohortowe w analizie przeżycia, które jest najbardziej adekwatne dla celów pracy. Prowadzi ono do następującej hipotezy agregacyjnej.

Definicja 2. [3] Zmienna losowa $T_{x,y}$ posiada rozkład spełniający hipotezę jednorodnej populacji (HJP), jeśli jest spełniona równość

$$\mathbb{P}(T_{x,y} > t) = \mathbb{P}(T_{0,y-x} > x+t | T_{0,y-x} > x).$$

W dalszej części pracy zakłada się, że HJP jest spełniona. Ponadto działa ona również dla zmiennej losowej $K_{x,y}$. W takiej sytuacji ${}_t p_x(y)$ można zapisać jako

$${}_t p_x = \mathbb{P}(T_{0,y-x} > x + t | T_{0,y-x} > x) = \frac{\mathbb{P}(T_{0,y-x} > x + t)}{\mathbb{P}(T_{0,y-x} > x)} = \frac{S_{y-x}(x + t)}{S_{y-x}(x)}. \quad (1.1)$$

Wielkość ${}_t q_x$ można wyrazić jako

$$\begin{aligned} {}_t q_x &= \mathbb{P}(T_{0,y-x} \leq x + t | T_{0,y-x} > x) = \frac{\mathbb{P}(x < T_{0,y-x} \leq x + t)}{\mathbb{P}(x < T_{0,y-x})} = \\ &= \frac{F_{0,y-x}(x + t) - F_{0,y-x}(x)}{S_{y-x}(x)}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

natomiast ${}_{s|t} q_x(y)$ ma postać

$$\begin{aligned} {}_{s|t} q_x &= \mathbb{P}(s < T_{x,y} \leq t) = \mathbb{P}(s + x < T_{0,y-x} \leq x + t | T_{0,y-x} > x) = \\ &= \frac{\mathbb{P}(s + x < T_{0,y-x} \leq x + t)}{\mathbb{P}(x < T_{0,y-x})} = \frac{S_{y-x}(s + x) - S_{y-x}(x + t)}{S_{y-x}(x)}. \end{aligned}$$

Co więcej, funkcję gęstości rozkładu zmiennej losowej $T_{x,y}$ można przedstawić jako

$$f_{x,y}(t) = \frac{d}{dt} F_{x,y}(t) = \frac{1}{S_{y-x}(x)} \cdot \frac{d}{dt} F_{0,y-x}(x + t) = \frac{f_{0,y-x}(x + t)}{S_{y-x}(x + t)}$$

oraz

$$f_{0,y}(t) = \frac{d}{dt} F_{0,y}(t) = -\frac{d}{dt} S_y(t).$$

Niech $t, s > 0$ oraz $t - s > 0$. Pokażemy teraz wyrażenia upraszczające obliczenia wcześniej wspomnianych prawdopodobieństw:

- prawdopodobieństwo przeżycia co najmniej t lat ${}_t p_x(y)$:

$$\begin{aligned} {}_t p_x(y) &= {}_{(t-s)+s} p_x(y) = \mathbb{P}(T_{x,y} > (t - s) + s) = \mathbb{P}(T_{x,y} > (t - s) + s | T_{x,y} > s) \cdot \\ &\cdot \mathbb{P}(T_{x,y} > s) = \mathbb{P}(T_{x+s,y+s} > t - s) \cdot \mathbb{P}(T_{x,y} > s) = {}_{t-s} p_{x+s}(y + s) \cdot {}_s p_x(y), \end{aligned}$$

w szczególności ${}_t p_x(y) = \prod_{j=0}^{t-1} p_{x+j}(y + j)$;

- prawdopodobieństwo śmierci w ciągu t lat ${}_t q_x(y)$:

$${}_t q_x(y) = 1 - {}_t p_x(y) = 1 - {}_{t-s} p_{x+s}(y + s) \cdot {}_s p_x(y);$$

- prawdopodobieństwo dożycia s lat i śmierci w ciągu następnych t lat ${}_{s|t} q_x(y)$:

$$\begin{aligned} {}_{s|t} q_x(y) &= \mathbb{P}(s < T_{x,y} \leq t + s) = \mathbb{P}(s < T_{x,y} \leq t + s | T_{x,y} > s) \cdot \mathbb{P}(T_{x,y} > s) = \\ &= \mathbb{P}(T_{x+s,y+s} \leq t) \cdot \mathbb{P}(T_{x,y} > s) = {}_s p_x(y) \cdot {}_t q_{x+s}(y + s). \end{aligned}$$

Niezwykle ważnym pojęciem dla dalszych rozdziałów pracy jest natężenie śmiertelności o następującej definicji.

Definicja 3. [11] Natężeniem śmiertelności x -latka w roku kalendarzowym y $\mu_x(y)$ nazywa się granicę, o ile istnieje,

$$\mu_x(y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{{}_t q_x(y)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(T_{x,y} \leq t)}{t}. \quad (1.3)$$

Wzór (1.3) można zapisać jako

$$\begin{aligned}\mu_x(y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(T_{0,y-x} \leq x+t | T_{0,y-x} > x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(x < T_{0,y-x} \leq x+t)}{\mathbb{P}(T_{0,y-x} > x) \cdot t} = \\ &= \frac{1}{S_{y-x}(x)} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_{0,y-x}(x+t) - F_{0,y-x}(x)}{t} = \frac{f_{0,y-x}(x)}{S_{y-x}(x)}.\end{aligned}$$

Dalej, z równania (1.1) wynika, że

$$\mu_x(y) = \frac{-\frac{d}{dx} S_{y-x}(x)}{S_{y-x}(x)} = -\frac{d}{dx} \ln S_{y-x}(x),$$

co prowadzi do równości

$$S_{y-x}(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu_u(y-x+u) du\right).$$

Z równania (1.1) widać, że

$$\begin{aligned}{}_t p_x(y) &= \frac{S_{y-x}(x+t)}{S_{y-x}(x)} = \frac{\exp(-\int_0^{x+t} \mu_u(y-x+u) du)}{\exp(-\int_0^x \mu_u(y-x+u) du)} = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_u(y-x+u) du\right) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = v+x \\ du = dv \end{array} \right\} = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+v}(y+v) dv\right).\end{aligned}$$

Żeby przedstawić powyższe prawdopodobieństwo w wygodnej dla obliczeń postaci, należy przyjąć poniższą hipotezę interpolacyjną.

Definicja 4. [3] Zmienna losowa $T_{x,y}$ posiada rozkład spełniający hipotezę kwadratami stałego natężenia śmiertelności (HCFM), jeśli $\mu_x(y)$ jest stałą funkcją w kwadratach $(x, x+1) \times (y, y+1)$, tzn.

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in [0, 1) \quad \mu_{x+\xi_1}(y+\xi_2) = \mu_x(y).$$

W dalszej części pracy zakłada się zachodzenie powyższej hipotezy. Wtedy prawdopodobieństwo przeżycia co najmniej t lat ${}_t p_x(y)$ można wyrazić jako

$${}_t p_x(y) = \exp\left(-\sum_{v=0}^{t-1} \mu_{x+v}(y+v)\right);$$

prawdopodobieństwo śmierci w przeciągu t lat ${}_t q_x(y)$ jako

$${}_t q_x(y) = 1 - \exp\left(-\sum_{v=0}^{t-1} \mu_{x+v}(y+v)\right);$$

natomiast prawdopodobieństwo dożycia s lat i śmierci w ciągu następnych t lat ${}_s | {}_t q_x(y)$ jako

$${}_s | {}_t q_x(y) = \exp\left(-\sum_{v=0}^{s-1} \mu_{x+v}(y+v)\right) \cdot \left(1 - \exp\left(-\sum_{v=0}^{t-1} \mu_{x+s+v}(y+s+v)\right)\right).$$

Ważnym pojęciem związanym z zachowaniem się natężenia śmiertelności w kwadracie $(x, x+1) \times (y, y+1)$ jest centralne natężenie śmiertelności.

Definicja 5. [3] Centralnym natężeniem śmiertelności $m_x(y)$ nazywa się ułamek

$$m_x(y) = \frac{\int_0^1 S_{y+u}(x+u)\mu_{x+u}(y+u)du}{\int_0^1 S_{y+u}(x+u)du}.$$

Powyższa definicja wskazuje na to, że $m_x(y)$ jest, ciągłą ze względu na wiek i rok kalendarzowy, ważoną średnią natężenia śmiertelności w kwadracie $(x, x+1) \times (y, y+1)$, dla której wagą jest funkcja przeżycia $S_{y+u}(x+u)$, $u \in (0, 1]$.

Przy założeniu HCFM zachodzi równość $m_x(y) = \mu_x(y)$, która ułatwi wnioskowanie w dalszej części pracy.

Ważną kwestię, wykorzystywaną w dalszych częściach pracy, stanowi estymacja natężenia $\mu_x(y)$. Wykorzysta się do tego metodologię związaną z funkcją wiarygodności.

Definicja 6. [6] Niech X_1, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie zadany funkcją gęstości $f(x; \theta)$, $\theta \in \Theta$, gdzie $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, a θ to parametr rozkładu. Funkcją wiarygodności nazywa się funkcję

$$L(\theta|x) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta),$$

gdzie $x = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Dla wygody często rozważa się logarytm naturalny funkcji wiarygodności, tzw. funkcję log-wiarygodności:

$$l(\theta|x) = \ln L(\theta|x) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \theta).$$

Definicja 7. [6] Zmienną losową $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ taką, że

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta|X)$$

nazywa się estymatorem największej wiarygodności (ENW) parametru θ .

Estymator $\hat{\theta}$ z powyższej definicji spełnia również równanie

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} l(\theta|X),$$

ponieważ logarytm naturalny jest funkcją ściśle rosnącą, a przez to zachowującą monotoniczność oryginalnej funkcji.

Definicje i rozumowanie przedstawione poniżej i do końca tego podrozdziału pochodzą z pracy magisterskiej M. Wiśniewskiej [18].

Niech N oznacza wielkość populacji, a $Z_i \in [0, 1]$ zmienną losową oznaczającą część roku, którą przeżył i -ty członek populacji. Jeżeli i -ta osoba przeżyła cały rok, to $Z_i = 1$.

Definicja 8. [18] Ekspozycją na ryzyko $ETR_{x,y}$ dla osób w wieku x mających ostatnie urodziny w roku kalendarzowym y nazywa się sumę

$$ETR_{x,y} = \sum_{i=1}^N Z_i.$$

Interpretuje się ją jako łączny czas przeżyty przez ludzi w wieku x mających urodziny w roku kalendarzowym y .

Definicja 9. [18] Zmienna losowa $D_{x,y}$ oznacza łączną liczbę zgonów w wieku x w roku kalendarzowym y i jest dana jako

$$D_{x,y} = \sum_{i=1}^N D_i,$$

gdzie $D_i = \mathbb{1}(i\text{-ta osoba umiera w wieku } x \text{ lat w roku kalendarzowym } t)$. Załóżmy, dla ustalenia uwagi, że $D_{x,y} \neq 0$.

Wielkość $N - D_{x,y}$ stanowi liczbę osób, które przeżyły rok kalendarzowy y . Niech $\mathcal{D} = \{i : D_i = 1\}$. Funkcję wiarygodności natężenia śmiertelności $\mu_x(y)$ dla obserwacji $D = (D_1, \dots, D_N)$ i $Z = (Z_1, \dots, Z_N)$ można przedstawić jako

$$\begin{aligned} L(\mu_x(y)|D, Z) &= \left(e^{-\mu_x(y)}\right)^{N-D_{x,y}} \prod_{i \in \mathcal{D}} e^{-T_i \mu_x(y)} \mu_x(y) = \mu_x(y)^{D_{x,y}} \cdot \\ &\cdot e^{-\mu_x(y)(N-D_{x,y}-\sum_{i \in \mathcal{D}} T_i)} = \mu_x(y)^{D_{x,y}} \cdot e^{-\mu_x(y) \sum_{i=1}^N T_i}. \end{aligned}$$

Funkcja log-wiarygodności parametru $\mu_x(y)$ ma postać

$$l(\mu_x(y)|D, Z) = D_{x,y} \ln \mu_x(y) - \mu_x(y) ETR_{x,y}.$$

Jej pochodna pierwszego rzędu wynosi

$$\frac{\partial l(\mu_x(y)|D, Z)}{\partial \mu_x(y)} = D_{x,y} \frac{1}{\mu_x(y)} - ETR_{x,y},$$

co po przyrównaniu do zera daje punkt krytyczny $\mu_x(y) = \frac{D_{x,y}}{ETR_{x,y}}$. Wielkość $D_{x,y}$ jest

dodatnia, zatem druga pochodna funkcji logwiarygodności $\frac{\partial^2 l(\mu_x(y)|D, Z)}{\partial (\mu_x(y))^2} = -\frac{D_{x,y}}{(\mu_x(y))^2}$ ma

ujemny znak. Oznacza to, że w punkcie krytycznym jest maksimum lokalne i jednocześnie globalne, czyli równoważnie $\hat{\mu}_x(y) = \frac{D_{x,y}}{ETR_{x,y}}$ to ENW parametru $\mu_x(y)$. Z założenia HCFM wynika również równość $\hat{\mu}_x(y) = \hat{m}_x(y)$.

1.3 Ubezpieczenia i renty życiowe

Wycena ubezpieczeń na życie i rent życiowych łączy opisane we wcześniejszych rozdziałach dziedziny: matematykę finansową oraz analizę przeżycia. W celu zakupu któregoś z tych kontraktów klient musi zapłacić ubezpieczycielowi pewną kwotę pieniędzy, którą nazywa się składką. Może ona przyjąć formę renty lub jednorazowej wpłaty. Składka netto pokrywa tylko średnie wypłaty ubezpieczyciela, natomiast przy składce brutto bierze się też pod uwagę jego koszty działalności i planowany zysk.

Ubezpieczenie życiowe to kontrakt, w którym właścicielowi lub osobom przez niego wyznaczonym wypłaca się pewną kwotę pieniędzy, zwaną benefitem, w sytuacji wystąpienia określonego zdarzenia, np. śmierci (mówi się wtedy o ubezpieczeniu na życie) lub przeżycia określonego momentu (mówi się wtedy o ubezpieczeniu na dożycie). Oczywiście, kontrakty te mogą być bardzo elastyczne i łączyć różne rodzaje wydarzeń.

Ubezpieczenia można również rozróżnić ze względu na czas objęty ochroną:

- ubezpieczenie na całe życie - okres ochronny jest nieograniczony,
- ubezpieczenie terminowe - okres ochronny jest ograniczony,

- ubezpieczenie natychmiastowe - okres ochronny zaczyna się w momencie zawarciu umowy (może być skończony lub nieskończony),
- ubezpieczenie odroczone - okres ochronny jest przesunięty w czasie względem momentu zawarcia umowy (może być skończony lub nieskończony).

Wypłata benefitu może nastąpić od razu w momencie wystąpienia zdarzenia, na które ubezpieczył się posiadacz polisy (kontraktu) albo na koniec roku, w którym nastąpiło zdarzenie.

W dalszej części pracy rozważane będą tylko natychmiastowe ubezpieczenia na całe życie z wypłatą na koniec roku śmierci. Niech $b \in (0, +\infty)$ będzie wielkością benefitu, δ intensywnością oprocentowania w skali roku, x wiekiem ubezpieczonego w chwili zawarcia umowy, y danym rokiem kalendarzowym, a $K_{x,y}$ odpowiednim całkowitym czasem trwania życia. Obecną wartością rozważanej polisy jest zmienna losowa

$$W_{x,y} = be^{-\delta(K_{x,y}+1)}.$$

Wartość oczekiwaną powyższej zmiennej nazywa się aktuarialną obecną wartością ubezpieczenia, która ma postać

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_{x,y}] &= bA_x(y) = b \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\delta(k+1)} \mathbb{P}(K_{x,y} = k) = b \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\delta(k+1)} {}_k|q_x(y) = \\ &= b \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\delta(k+1)} {}_k p_x(y) q_{x+k}(y+k), \end{aligned}$$

gdzie $A_x(y)$ to oznaczenie jednorazowej składki netto na rozważane ubezpieczenie z benefitem w wysokości 1.

Renta życiowa to kontrakt, będący losowym odpowiednikiem renty pewnej opisanej w Podrozdziale 1.1, w którym posiadaczowi wypłaca się określone kwoty (raty, benefity) w równych przedziałach czasowych w sytuacji dożycia określonych momentów. Można wyróżnić jej dwa główne rodzaje:

- rentę na całe życie (okres obowiązywania umowy kończy się w momencie śmierci posiadacza polisy i nie jest ograniczony w inny sposób);
- rentę terminową (okres obowiązywania umowy jest ograniczony).

Tak jak w przypadku ubezpieczeń można też rozważać renty natychmiastowe i odroczone, a także, jak w Podrozdziale 1.1, renty z dołu oraz z góry.

Inne kryterium rozróżniania może stanowić wysokość rat. Mogą być one stałe przez cały okres obowiązywania umowy. Mogą też maleć bądź rosnać. W dalszej części pracy rozważane będą wyłącznie natychmiastowe renty z dołu na całe życie ze stałymi rataми. Obecna wartość takiego kontraktu, przy założeniach analogicznych do ubezpieczenia, wynosi

$$V_{x,y} = ba_{\overline{K_{x,y}}} = b \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\delta k} \mathbb{1}(K_{x,y} > k).$$

Aktuarialna obecna wartość kontraktu ma natomiast postać

$$\mathbb{E}[V_{x,y}] = ba_x(y) = b \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\delta k} \mathbb{P}(K_{x,y} > k) = b \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\delta k} {}_k p_x(y),$$

gdzie $a_x(y)$ to oznaczenie jednorazowej składki netto na rozważaną rentę wypłacającą benefit w wysokości 1.

2 Model Lee-Cartera

Model Lee-Cartera zakłada stochastyczną ewolucję centralnego natężenia śmiertelności $m_x(y)$, które przy założeniu HCFM jest tożsame ze zwykłym natężeniem śmiertelności $\mu_x(y)$. Biorąc to pod uwagę, model opisany w artykule z 1992 roku [8] można zapisać jako

$$\ln \mu_x(y) = \alpha_x + \beta_x \kappa_y + \epsilon_{x,y}, \quad (2.1)$$

gdzie $x \in \{x_1, \dots, x_m\}$, $y \in \{y_1, \dots, y_n\}$ to, odpowiednio, rozważane skończone lata życia oraz lata kalendarzowe.

Składnik α_x przedstawia uśrednione względem czasu zachowanie śmiertelności dla wieku x , κ_y to indeks śmiertelności zależny od czasu, a β_x opisuje odchylenia od średniego poziomu α_x przy zmianie κ_y . Wielkość $\epsilon_{x,y}$ stanowi błąd losowy dopasowania, o którym zakłada się pochodzenie z rozkładu o wartości oczekiwanej 0 i wariancji $\sigma_{\epsilon_{x,y}}^2$.

Z postaci (2.1) widać, że model jest nieparametryczny, ponieważ wartość zmiennej objaśnianej $\mu_x(y)$ nie zależy bezpośrednio od wartości zmiennych objaśniających x, y . Co więcej model ten jest niejednoznaczny. Dla zestawów czynników $\alpha_x, \beta_x, \kappa_y$; $\alpha_x - \beta_x c, \beta_x, \kappa_y + c$ oraz $\alpha_x, d\beta_x, \frac{\kappa_y}{d}$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ otrzymuje się te same wartości $\mu_x(y)$. W celu zapewnienia jednoznaczności w dalszej części pracy ustala się następujące ograniczenia [8]:

$$\sum_{x=x_1}^{x_m} \beta_x = 1, \quad \sum_{y=y_1}^{y_n} \kappa_y = 0. \quad (2.2)$$

2.1 Estymacja składników modelu

Składniki modelu (2.1) można wyestymować przy pomocy opisanej w Podrozdziale 1.2 metodologii wykorzystującej maksymalizację funkcji wiarygodności. Niech błędy $\epsilon_{x,y}$ pochodzą z rozkładu normalnego $N(0, \sigma_{\epsilon_{x,y}}^2)$. Wówczas gęstość $\epsilon_{x,y} = \ln \mu_x(y) - \alpha_x - \beta_x \kappa_y$ ma postać

$$f(x, y) = \frac{1}{\sigma_{\epsilon_{x,y}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln \mu_x(y) - \alpha_x + \beta_x \kappa_y)^2}{2\sigma_{\epsilon_{x,y}}^2}}.$$

W związku z tym, z Definicji 6, funkcja wiarygodności jest następująca:

$$L(\alpha_x, \beta_x, \kappa_y | \epsilon_{x,y}) = \prod_{x=x_1}^{x_m} \prod_{y=y_1}^{y_n} \frac{1}{\sigma_{\epsilon_{x,y}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln \mu_x(y) - \alpha_x + \beta_x \kappa_y)^2}{2\sigma_{\epsilon_{x,y}}^2}},$$

gdzie $\epsilon_{x,y}$ to wektor błędów losowych $(\epsilon_{x_1, y_1}, \dots, \epsilon_{x_m, y_1}, \dots, \epsilon_{x_1, y_n}, \dots, \epsilon_{x_m, y_n})$. Dla wygody obliczeń rozważmy funkcję logwiarygodności

$$l(\alpha_x, \beta_x, \kappa_y | \epsilon_{x,y}) = \text{const} - \frac{1}{2\sigma_{\epsilon_{x,y}}^2} \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{y=y_1}^{y_n} (\ln \hat{\mu}_x(y) - \alpha_x - \beta_x \kappa_y)^2, \quad (2.3)$$

gdzie $\text{const} = -\sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{y=y_1}^{y_n} \ln(\sigma_{\epsilon_{x,y}} \sqrt{2\pi})$.

Przyrównując do zera pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji (2.3) względem α_x o postaci

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_x} l(\alpha_x, \beta_x, \kappa_y | \epsilon_{x,y}) = \frac{1}{\sigma_{\epsilon_{x,y}}^2} \sum_{y=y_1}^{y_n} (\ln \hat{\mu}_x(y) - \alpha_x - \beta_x \kappa_y) = 0$$

otrzymuje się równanie

$$\sum_{y=y_1}^{y_n} \ln \hat{\mu}_x(y) = (y_n - y_1 + 1)\alpha_x + \beta_x \sum_{y=y_1}^{y_n} \kappa_y.$$

Z założonych ograniczeń (2.2) wynika, że potencjalnym ENW składnika α_x może być wielkość $\hat{\alpha}_x = \frac{\sum_{y=y_1}^{y_n} \ln \hat{\mu}_x(y)}{y_n - y_1 + 1}$. Druga pochodna cząstkowa funkcji (2.3) względem α_x ma postać

$$\frac{\partial^2}{\partial(\alpha_x)^2} l(\alpha_x, \beta_x, \kappa_y | \epsilon_{x,y}) = -\frac{y_n - y_1 + 1}{\sigma_{\epsilon_{x,y}}^2}$$

i jest ujemna, co oznacza, że $\hat{\alpha}_x = \frac{\sum_{y=y_1}^{y_n} \ln \hat{\mu}_x(y)}{y_n - y_1 + 1}$ rzeczywiście stanowi ENW wielkości α_x .

Estymacja składników β_x i κ_y jest bardziej problematyczna i wymaga użycia metody rozkładu macierzy na wartości osobliwe.

Niech $\hat{\mathbf{M}}$ będzie macierzą natężeń śmiertelności

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{x_1}(y_1) & \cdots & \hat{\mu}_{x_1}(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mu}_{x_m}(y_1) & \cdots & \hat{\mu}_{x_m}(y_n) \end{pmatrix}$$

o wymiarach $(x_m - x_1 + 1) \times (y_n - y_1 + 1)$, a $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\kappa}$ to wektory

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\hat{\alpha}_{x_1}, \dots, \hat{\alpha}_{x_m})^T, \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_{x_1}, \dots, \beta_{x_m})^T, \quad \boldsymbol{\kappa} = (\kappa_{y_1}, \dots, \kappa_{y_n})^T.$$

Rozważmy teraz macierz $\mathbf{G} = \ln \hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}$:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \ln \hat{\mu}_{x_1}(y_1) - \alpha_{x_1} & \cdots & \ln \hat{\mu}_{x_1}(y_n) - \alpha_{x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln \hat{\mu}_{x_m}(y_1) - \alpha_{x_m} & \cdots & \ln \hat{\mu}_{x_m}(y_n) - \alpha_{x_m} \end{pmatrix}$$

o takim samym wymiarze jak $\hat{\mathbf{M}}$. Element macierzy \mathbf{G} w x -tym wierszu oraz y -wej kolumnie jest oznaczony jako g_{xy} . Szukane estymatory wielkości β_x oraz κ_y maksymalizują funkcję logwiarogodności (2.3), co jest równoważne minimalizacji funkcji celu

$$\mathcal{O}_{LS}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{y=y_1}^{y_n} (g_{xy} - \beta_x \kappa_y)^2. \quad (2.4)$$

Niech $h_x = x_m - x_1 + 1$, $h_y = y_n - y_1 + 1$ oraz niech $\mathbf{G} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T$, gdzie $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{h_x \times h_x}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{h_y \times h_y}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1(\mathbf{G}), \dots, \sigma_p(\mathbf{G}))$, $p = \min\{h_x, h_y\}$, $\sigma_1(\mathbf{G}) > \dots > \sigma_p(\mathbf{G})$, będąc dekompozycją macierzy \mathbf{G} względem wartości osobliwych $\sigma_1(\mathbf{G}), \dots, \sigma_p(\mathbf{G})$. Macierz $\mathbf{H}_k \in \mathbb{R}^{h_x \times h_y}$ nazywa się k -tym najlepszym przybliżeniem macierzy \mathbf{G} w sensie normy Frobeniusa, jeżeli zachodzi

$$\|\mathbf{G} - \mathbf{H}_k\|_F = \inf_{\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{h_x \times h_y} \wedge \text{rank}(\mathbf{H}) \leq k} \|\mathbf{G} - \mathbf{H}\|_F,$$

gdzie $\text{rank}(\mathbf{H})$ jest rzędem macierzy \mathbf{H} , natomiast norma Frobeniusa to norma $\|\cdot\|_F : \mathbb{R}^{h_x \times h_y} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana jako

$$\|\mathbf{G}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^p \sigma_i^2(\mathbf{G})} \quad (2.5)$$

dla $p = \min\{h_x, h_y\}$ oraz $\sigma_i(\mathbf{G})$ będących wartościami osobliwymi macierzy \mathbf{G} . Poniższe twierdzenia pozwalają połączyć rozkład macierzy według wartości osobliwych z wyznaczeniem jej k -tego najlepszego przybliżenia danego wzorem (2.5). Dowód pierwszego z nich i szkic dowodu drugiego znajduje się w pracy [18].

Twierdzenie 1. [18] Niech $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{a \times b}$, $a, b \in \mathbb{N}$, $c = \min\{a, b\}$ będzie macierzą o wyrazach rzeczywistych. Niech λ_i , $i \in \{1, \dots, p\}$ będą wartościami własnymi macierzy $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ (lub $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$). Wówczas wartości osobliwe macierzy \mathbf{J} stanowią pierwiastki wartości własnych $\sqrt{\lambda_j}$.

Twierdzenie 2. [18] Niech $a, b, k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{J} \in M^{a \times b}$, $r = \text{rank}(\mathbf{J})$ oraz $k \in \{1, \dots, r\}$. Niech $\mathbf{J} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ będzie dekompozycją macierzy \mathbf{J} względem wartości osobliwych opisaną tak jak na poprzedniej stronie dla macierzy \mathbf{G} . Wtedy k -te najlepsze przybliżenie macierzy \mathbf{J} według normy Frobeniusa ma postać

$$\mathbf{J}_k = \sum_{l=1}^k \sigma_l(\mathbf{J}) \mathbf{u}_l \mathbf{v}_l^T,$$

gdzie $\sigma_l(\mathbf{J})$ to l -ta wartość osobliwa macierzy \mathbf{J} , \mathbf{u}_l to l -ta kolumna macierzy \mathbf{U} , a \mathbf{v}_l to l -ta kolumna macierzy \mathbf{V} .

Rozważmy macierze $\mathbf{G}^T\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{h_y \times h_y}$ oraz $\mathbf{G}\mathbf{G}^T \in \mathbb{R}^{h_x \times h_x}$. Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ będą uporządkowanymi nierosnąco wartościami własnymi macierzy $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$. Na mocy Twierdzenia 1 macierz \mathbf{G} posiada wartości osobliwe $\sqrt{\lambda_1} \geq \dots \geq \sqrt{\lambda_n}$. Niech \mathbf{u}_1 będzie wektorem własnym dla największej wartości własnej macierzy $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$, tj. dla $\sqrt{\lambda_1}$, a \mathbf{u}_1 analogicznym wektorem dla macierzy $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$. Z Twierdzenia 2 wynika, że pierwsze najlepsze przybliżenie macierzy \mathbf{G} według normy Frobeniusa to

$$\mathbf{G} \approx \sqrt{\lambda_1} \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T.$$

Biorąc pod uwagę funkcję celu (2.4), szukane estymatory muszą spełniać równanie

$$\sqrt{\lambda_1} \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T = \hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\kappa}}, \quad (2.6)$$

przy ograniczeniach danych w (2.2).

Łatwo zauważyć, że jeżeli $\sum_{i=1}^{h_x} u_{1i} \neq 0$ to $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\mathbf{u}_1}{\sum_{i=1}^{h_x} u_{1i}}$, gdzie u_{1i} to i -ty element wektora \mathbf{u}_1 , ponieważ $\sum_{x=x_1}^{x_m} \hat{\beta}_x = \frac{1}{\sum_{i=1}^{h_x} u_{1i}} \cdot \sum_{i=1}^{h_x} u_{1i} = 1$. Podstawiając wyznaczone $\hat{\boldsymbol{\beta}}_x$ do równania (2.6) i mnożąc jego obie strony przez skalar $\sum_{i=1}^{h_x} u_{1i}$ oraz lewostronnie przez wektor $\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{h_x} u_{1i}}, \dots, \frac{1}{\sum_{i=1}^{h_x} u_{1i}} \right)^T$, otrzymujemy $\hat{\boldsymbol{\kappa}} = \sqrt{\lambda_1} \sum_{i=1}^{h_x} u_{1i} \mathbf{v}_1$.

2.2 Kalibracja modelu

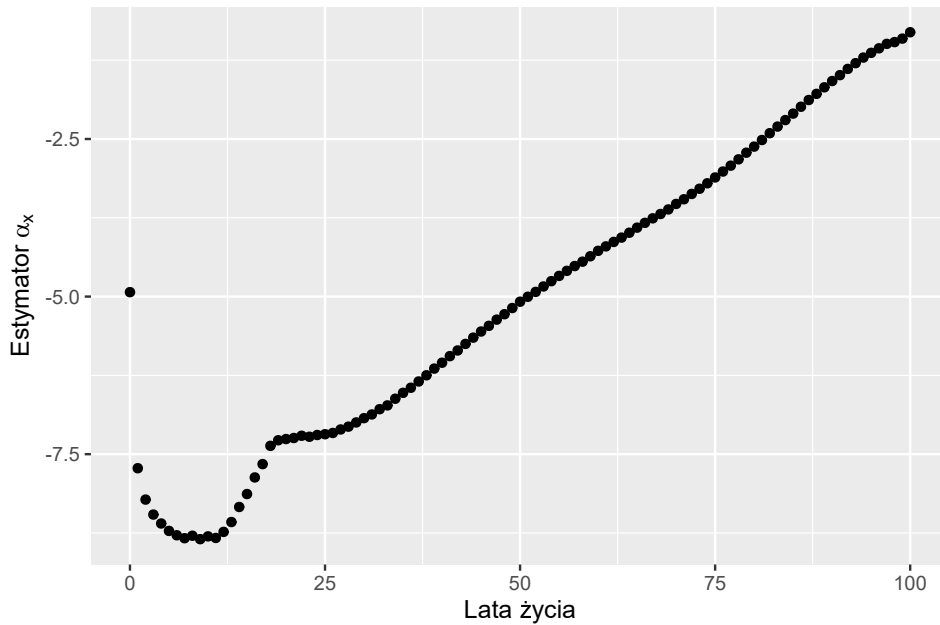
Do kalibracji modelu wykorzystano dane dotyczące Polski znajdujące się w projekcie Human Mortality Database (HMD) [15]. Na potrzeby dalszych rozdziałów pracy, w których wycenia się produkty ubezpieczeniowe, nie rozróżniano płci. Inne postępowanie mogłoby prowadzić do dyskryminacji klientów, a przez to do bezużytecznych wyników.

Metodologia, której użyto do kalibracji czynników modelu, jest opisana w pracy [18]. Niech $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ oznacza lata kalendarzowe, na podstawie których dokonuje się estymacji. Podobnie jak w pracy [18] rok początkowy y_1 to 1990, natomiast rok ostatni y_n to 2019, co daje okno czasowe o długości 30 lat. Rozważane lata życia $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ mają z kolei ograniczenia $x_1 = 0$ oraz $x_m = 100$, co jest spowodowane tym, że dane dla $x > 100$ są często gorszej jakości, skutkiem czego są problemy numeryczne przy obliczaniu

rozkładu macierzy danych względem wartości osobliwych (SVD).

Estymatory poszczególnych czynników modelu Lee-Cartera przedstawiają się następująco:

- Estymator $\hat{\alpha}_x$: Na Rysunku 1 można zauważyć, że wartość estymatora ma tendencję spadkową przez około pierwszych 11 lat życia, po czym trend jest rosnący. Takie zachowanie może być spowodowane małą odpornością noworodków, która rośnie wraz z wiekiem dziecka pod opieką dorosłych. W wieku około 11-12 lat rozpoczyna się faza dojrzewania, która może prowadzić do wzrostu ryzykownych zachowań oraz kończy się początkiem fazy dorosłości, gdzie następuje powolne niszczenie się organizmu poprzez starzenie.

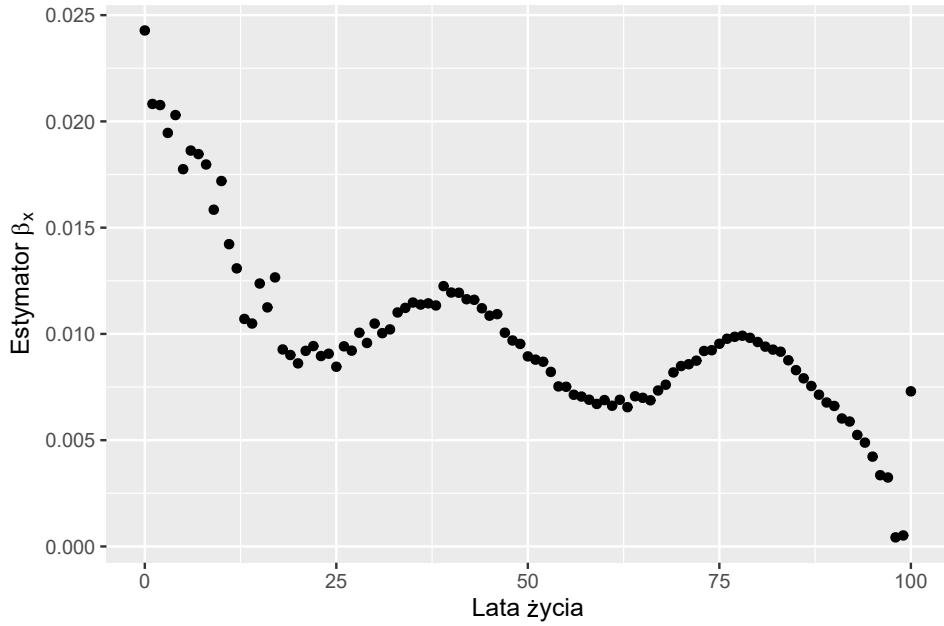


Rysunek 1: Wartości estymatora wielkości α_x dla poszczególnych lat życia

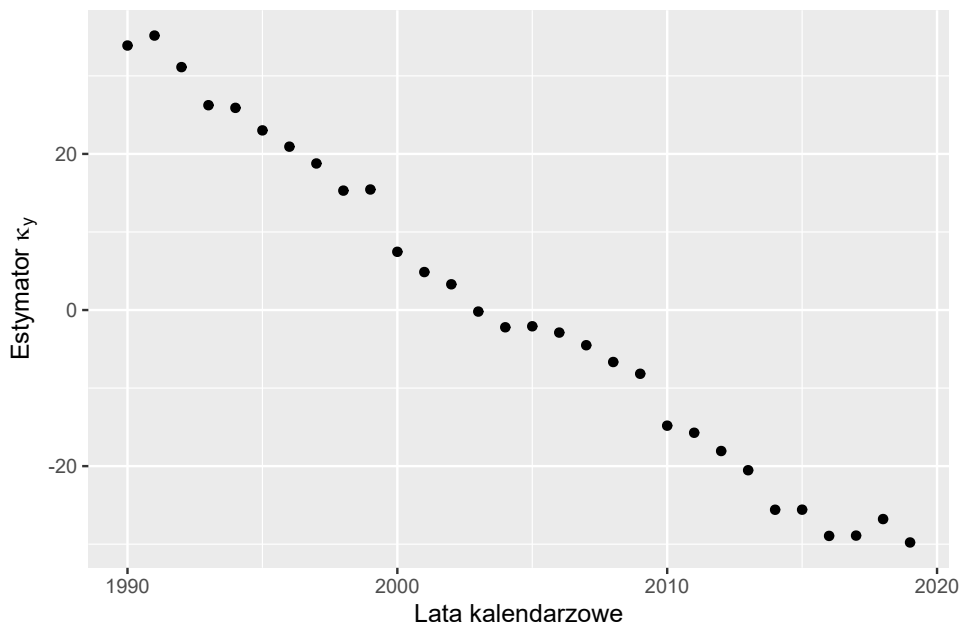
Źródło: Opracowanie własne

- Estymator $\hat{\beta}_x$: Na Rysunku 2 można zauważyć grupy wiekowe zarówno z tendencją spadkową jak i z rosnącą, co może wskazywać na okresy życia, podczas których śmiertelność najbardziej się poprawiła bądź pogorszyła. Duże wartości dla początkowych lat życia mogą być spowodowane przez duże obniżenie śmiertelności w wyniku rozwoju medycyny. W podobny sposób można zinterpretować wzrost wartości estymatora dla fazy wczesnej starości, tj. od ok. 60. do 75. roku życia. Z kolei wzrost dla grupy od ok. 25. roku życia do 40. można wytłumaczyć stabilnym wzrostem ogólnej jakości życia.
- Estymator $\hat{\kappa}_y$: Na Rysunku 3 widać tendencję spadkową dla estymatora $\hat{\kappa}_y$. Jest ona najprawdopodobniej spowodowana rozwojem medycyny oraz poprawieniem standardu życia dzięki rozwojowi gospodarki.

Mając wyznaczone estymatory wszystkich składników modelu, jesteśmy w stanie porównać rzeczywiste i dopasowane wartości natężenia śmiertelności dla poszczególnych lat życia i rozważanego na potrzeby kalibracji okna czasowego. W pracy [8] szereg czasowy $\hat{\kappa}_y$ jest dodatkowo kalibrowany w taki sposób, żeby dla każdego momentu $y = y_1, \dots, y_n$ zachodziła równość $\sum_{x=x_1}^{x_m} \ln \mu_x(y) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_y$. Etap ten pominięto, ponieważ nie



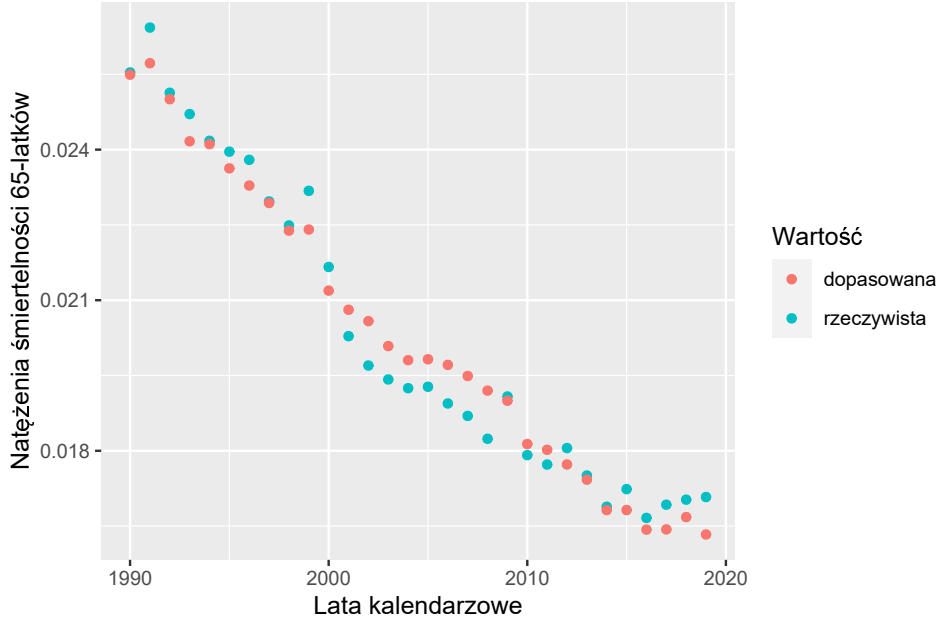
Rysunek 2: Wartości estymatora wielkości β_x dla poszczególnych lat życia
Źródło: Opracowanie własne



Rysunek 3: Wartości estymatora wielkości κ_y dla poszczególnych lat kalendarzowych
Źródło: Opracowanie własne

ponieważ nie jest on potrzebny w dalszych rozdziałach pracy. Na Rysunku 4 widać rzeczywiste i dopasowane natężenia śmiertelności dla 65-latków w rozważanym oknie kalibracyjnym. Można zauważyć, że oba warianty mają podobny trend oraz są do siebie stosunkowo zbliżone.

Ostatnim aspektem dotyczącym kalibracji modelu Lee-Cartera jest wyestymowanie wartości parametrów szeregu czasowego, którym modeluje się wskaźnik śmiertelności κ_y . Będą one potrzebne do przeprowadzenia symulacji opisanych w dalszych rozdziałach pracy. Zgodnie z pracą [18] szukanym modelem szeregu czasowego jest $ARIMA(0, 1, 0)$.



Rysunek 4: Porównanie rzeczywistych i dopasowanych wartości natężenia śmiertelności dla 65-latków

Źródło: Opracowanie własne

Wskaźnik κ_y można opisać wzorem [18]:

$$\kappa_y = \kappa_{y-1} + \mu_\kappa + Z_y,$$

gdzie Z_y to zmienna losowa o wartości oczekiwanej 0 i wariancji σ_κ^2 . Przy jednokrotnym różnicowaniu κ_y dostaniemy

$$\kappa_y - \kappa_{y-1} = \mu_\kappa + Z_y,$$

co prowadzi do następujących charakterystyk procesu $\{\kappa_y\}$:

- $\mathbb{E}[\kappa_y - \kappa_{y-1}] = \mathbb{E}[a + Z_y] = a + \mathbb{E}[Z_y] = \mu_\kappa$;
- $Var[\kappa_y - \kappa_{y-1}] = Var[a + Z_y] = Var[Z_y] = \sigma_\kappa^2$.

Ich estymatorami są, odpowiednio,

- $\hat{\mu}_\kappa = \frac{1}{y_n - y_1} \sum_{i=y_2}^{y_n} (\hat{\kappa}_i - \hat{\kappa}_{i-1}) = \frac{\hat{\kappa}_{y_n} - \hat{\kappa}_{y_1}}{y_n - y_1}$;
- $\hat{\sigma}_\kappa^2 = \frac{1}{y_n - y_1 - 1} \sum_{i=y_2}^{y_n} (\hat{\kappa}_i - \hat{\kappa}_{i-1} - \hat{a})^2$.

Dla rozważanych danych wartości powyższych estymatorów wynoszą:

- $\hat{a} \approx -2,19541$;
- $\hat{\sigma}_\kappa^2 \approx 4,925442$.

3 Metody hedgingu naturalnego

Hedging to strategia inwestycyjna umożliwiająca redukcję strat. Jego naturalny wariant dotyczy łączenia pozycji na odwrotnie działające instrumenty finansowe. Na rynku ubezpieczeń na życie oraz rent życiowych będzie on realizowany przez zakup lub sprzedaż kontraktów wypłacających benefity przysługujące w wykluczających się zdarzeniach. W interesującej nas sytuacji zmniejszonej śmiertelności koszty wypłat korzyści na wypadek śmierci maleją i w ten sposób równoważą zwiększone koszty korzyści wypłacanych w sytuacji dożycia określonych momentów, co prowadzi do mniejszego rozrzutu zagregowanych wypłat. W dalszych podrozdziałach opiszemy główne metody tego hedgingu, a mianowicie hedging poprzez czas i poprzez dziedzinę działalności, które zostały wprowadzone w Rozdziale 7. w książce R. Pitacco et al. [11].

Na początku zdefiniujemy podstawowe wielkości związane z rozważanym portfelem rent życiowych. Do ich opisu wykorzystamy podejście statyczne opisane na początku Rozdziału 7. w publikacji [11].

3.1 Opis portfela

Niech y_0 , x_0 i ω będą, odpowiednio, rokiem wejścia w życie umowy o wypłacie renty, liczbą skończonych przez rencistę lat w momencie y_0 oraz maksymalnym wiekiem, który można dożyć. Niech $L_k(y_0)$ oznacza losową liczbę rencistów w chwili k liczoną od roku kalendarzowego y_0 , $k = 0, 1, \dots, \omega - x_0$, gdzie $L_0(y_0)$ stanowi początkowy stan portfela. Realizację $L_k(y_0)$ będziemy oznaczać przez $l_k(y_0)$. W szczególności, zachodzi równość $L_0(y_0) = l_0(y_0)$. Niech $P = \{1, \dots, l_0(y_0)\}$ będzie zbiorem indeksów polis w rozważanym portfelu. Wówczas wielkości odnoszące się do pojedynczej polisy $p \in P$ będą oznaczone górnym indeksem (p).

Portfel aktywnych polis w chwili k , liczonej od roku kalendarzowego y_0 , można zapisać jako

$$\Pi_k(y_0) = \{p \in P : K_{x_0, y_0}^{(p)} > k\},$$

gdzie $K_{x_0, y_0}^{(p)}$ to całkowity czas trwania życia rencisty w wieku x_0 w roku kalendarzowym y_0 , który wykupił p -tą polisę.

Wszelkie wielkości odnoszące się do rozważanego portfela będą dalej oznaczone z wykorzystaniem górnego indeksu (Π). Wówczas, roczne wypłaty z portfela, dla $k = 1, \dots, \omega - x_0$, liczonego od y_0 , mają postać

$$W_k^{(\Pi)}(y_0) = \sum_{p \in \Pi_k(y_0)} w_k^{(p)}(y_0),$$

gdzie $w_k^{(p)}(y_0)$ to wypłata p -tej polisy w k -tym roku, liczonym od y_0 . W dalszej części pracy zakłada się równość $w_k^{(p)}(y_0) = w$ dla wszystkich $p \in P$, $k = 1, \dots, \omega - x_0$ oraz y_0 .

Obecna wartość przyszłych wypłat w chwilach $k = 0, 1, \dots, \omega - x_0$, liczonych od roku kalendarzowego y_0 , dla pojedynczej polisy ma postać

$$Y_k^{(p)}(y_0) = w a_{\overline{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}}}.$$

Jeśli wysumujemy aktywne polisy, to dostaniemy obecną wartość przyszłych wypłat z portfela:

$$Y_k^{(\Pi)}(y_0) = \sum_{p \in \Pi_k} Y_k^{(p)}(y_0).$$

Z założenia homogeniczności $w_k^{(p)}(y_0)$ ze względu na k , p i y_0 wynika, że roczne wypłaty z portfela aktywnych polis wynoszą

$$W_k^{(\Pi)}(y_0) = wL_k(y_0),$$

natomiast ich przyszła wartość w chwilach $k = 1, \dots, \omega - x_0$ to

$$Y_k^{(\Pi)}(y_0) = w \sum_{h=k+1}^{\omega-x_0} L_h(y_0)e^{-(h-k)\delta},$$

gdzie δ to roczna intensywność oprocentowania. W dalszej części pracy zakładamy, że całkowite czasy trwania życia rencistów $K_{x_0, y_0}^{(p)}$ są niezależne i o tym samym rozkładzie. Możemy wówczas uprościć dalsze wyrażenia, traktując $Y_k^{(1)}(y_0)$ jako obecną wartość przyszłych wypłat pojedynczej polisy.

Niech $\mathcal{A} = \{A_1(\tau), \dots, A_r(\tau)\}$ będzie zbiorem założeń o ewolucji śmiertelności dla roku kalendarzowego $\tau = y_0 - x_0$ będącego jednocześnie rokiem narodzin właścicieli polis w rozważanym portfelu. Zakładamy dalej, że całkowite czasy trwania życia są warunkowo niezależne i mają ten sam rozkład pod warunkiem $A_h(\tau) \in \mathcal{A}$, $h = 1, \dots, r$.

Rozważmy następujące wielkości, przy czym $l_k(y_0)$ to obserwowane liczby aktywnych polis w chwili k :

- warunkową wartość oczekiwaną przyszłych wypłat z portfela

$$\mathbb{E}[Y_k^{(\Pi)}(y_0)|A_h(\tau), l_k(y_0)] = l_k(y_0)\mathbb{E}[Y_t^{(1)}(y_0)|A_h(\tau)], \quad (3.1)$$

- warunkową wariancję przyszłych wypłat z portfela

$$Var[Y_k^{(\Pi)}(y_0)|A_h(\tau), l_k(y_0)] = l_k(y_0)Var[Y_k^{(1)}(y_0)|A_h(\tau)], \quad (3.2)$$

- warunkowy współczynnik zmienności przyszłych wypłat z portfela

$$CV[Y_k^{(\Pi)}(y_0)|A_h(\tau), l_k(y_0)] = \frac{1}{\sqrt{l_k(y_0)}} \frac{\sqrt{Var[Y_k^{(1)}(y_0)|A_h(\tau)]}}{\mathbb{E}[Y_k^{(1)}(y_0)|A_h(\tau)]}. \quad (3.3)$$

Współczynnik zmienności będzie traktowany w dalszej części pracy jako indeks ryzyka złej wyceny kontraktu. Można w łatwy sposób zauważyć, że

$$\lim_{l_k(y_0) \rightarrow \infty} CV[Y_k^{(\Pi)}(y_0)|A_h(\tau), l_k(y_0)] = 0,$$

co oznacza całkowitą redukcję strat i zysków. Jednak taka sytuacja jest możliwa jedynie, gdy rzeczywista ewolucja śmiertelności pokrywa się z założeniem $A_h(\tau)$. Najczęściej nie ma to miejsca, wobec czego należy rozwinąć przypuszczenia o zachowaniu się mierników śmiertelności. Można to zrobić poprzez zdefiniowanie wag dla poszczególnych założeń ze zbioru \mathcal{A} .

Niech $\rho(A_h(\tau)) = \rho_h(\tau)$ oznacza wagę h -tego założenia $A_h(\tau) \in \mathcal{A}$. Ponadto, niech $\sum_{h=1}^r \rho_h(\tau) = 1$. Wtedy wagi można zinterpretować jako prawdopodobieństwa prawdziwości poszczególnych założeń. Wartości $\rho_h(\tau)$ są przyporządkowywane w arbitralny sposób, co prowadzi do naiwności rozkładu prawdopodobieństwa na zbiorze \mathcal{A} oraz do ryzyka parametrycznego, które będziemy utożsamiać z ryzykiem źle prognozowanej śmiertelności. Pomimo tych dwóch wad, samo rozważenie różnych ewolucji śmiertelności w czasie powoduje, że model bardziej odpowiada rzeczywistości.

Możemy teraz zdefiniować bezwarunkowe wersje wielkości (3.1), (3.2) oraz (3.3). Niech $\tilde{A}(\tau)$ będzie nieznanym założeniem o ewolucji śmiertelności. Mamy następujące bezwarunkowe charakterystyki (własności dwóch pierwszych są opisane w Appendixie):

- wartość oczekiwana przyszłych wypłat z portfela

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y_k^{(\Pi)}(y_0)|l_k(y_0)\right] &= \mathbb{E}_\rho\left[\mathbb{E}\left[Y_k^{(\Pi)}(y_0)|\tilde{A}(\tau), l_k(y_0)\right]\right] = l_k(y_0) \cdot \\ &\cdot \mathbb{E}_\rho\left[\mathbb{E}\left[Y_k^{(1)}(y_0)|\tilde{A}(\tau)\right]\right] = l_k(y_0) \sum_{h=1}^r \mathbb{E}\left[Y_k^{(1)}(y_0)|A_h(\tau)\right] \rho_h = \\ &= l_k(y_0) \mathbb{E}\left[Y_k^{(1)}(y_0)\right],\end{aligned}$$

- wariancja przyszłych wypłat z portfela

$$\begin{aligned}\text{Var}\left[Y_k^{(\Pi)}(y_0)|l_k(y_0)\right] &= \mathbb{E}_\rho\left[\text{Var}\left[Y_k^{(\Pi)}(y_0)|\tilde{A}(\tau), l_k(y_0)\right]\right] + \\ &+ \text{Var}_\rho\left[\mathbb{E}\left[Y_k^{(\Pi)}(y_0)|\tilde{A}(\tau), l_k(y_0)\right]\right] = l_k(y_0) \mathbb{E}_\rho\left[\text{Var} E\left[Y_k^{(1)}(y_0)|\tilde{A}(\tau)\right]\right] + \\ &+ (l_k(y_0))^2 \text{Var}_\rho\left[\mathbb{E}\left[Y_k^{(1)}(y_0)|\tilde{A}(\tau)\right]\right] = l_k(y_0) \sum_{h=1}^r \text{Var}\left[Y_k^{(1)}(y_0)|A_h(\tau)\right] \rho_h + \\ &+ (l_k(y_0))^2 \sum_{h=1}^r \left(\mathbb{E}\left[Y_k^{(1)}(y_0)|A_h(\tau)\right] - \mathbb{E}\left[Y_k^{(1)}(y_0)\right]\right)^2 \rho_h,\end{aligned}$$

- współczynnik zmienności przyszłych wypłat z portfela

$$\begin{aligned}\text{CV}\left[Y_k^{(\Pi)}(y_0)|l_k(y_0)\right] &= \frac{\sqrt{\text{Var}\left[Y_k^{(\Pi)}(y_0)|l_k(y_0)\right]}}{\mathbb{E}\left[Y_k^{(\Pi)}(y_0)|l_k(y_0)\right]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{l_k(y_0)} \frac{\mathbb{E}_\rho\left[\text{Var}\left[Y_k^{(1)}(y_0)|\tilde{A}(\tau)\right]\right]}{\left(\mathbb{E}\left[Y_k^{(1)}(y_0)\right]\right)^2} + \frac{\text{Var}_\rho\left[\mathbb{E}\left[Y_k^{(1)}(y_0)|\tilde{A}(\tau)\right]\right]}{\left(\mathbb{E}\left[Y_k^{(1)}(y_0)\right]\right)^2}}.\end{aligned}$$

W powyższym wzorze na bezwarunkowy współczynnik zmienności pod pierwiastkiem występują dwa składniki. Pierwszy z nich, $\frac{1}{l_k(y_0)} \frac{\mathbb{E}_\rho\left[\text{Var}\left[Y_k^{(1)}(y_0)|\tilde{A}(\tau)\right]\right]}{\left(\mathbb{E}\left[Y_k^{(1)}(y_0)\right]\right)^2}$ zależy od efektu dzielenia ryzyka. W rozważanej sytuacji jest to realizowane przez łączenie pojedynczych polis w jeden zagregowany portfel. Prowadzi to do redukcji części ryzyka. Drugi składnik, $\frac{\text{Var}_\rho\left[\mathbb{E}\left[Y_k^{(1)}(y_0)|\tilde{A}(\tau)\right]\right]}{\left(\mathbb{E}\left[Y_k^{(1)}(y_0)\right]\right)^2}$, opisuje ryzyko systemowe, które w rozważanym przypadku stanowi ryzyko parametryczne, niewrażliwe na wcześniej wymieniony efekt. W szczególności zachodzi

$$\lim_{l_k(y_0) \rightarrow \infty} \text{CV}\left[Y_k^{(\Pi)}(y_0)|l_k(y_0)\right] = \sqrt{\frac{\text{Var}_\rho\left[\mathbb{E}\left[Y_k^{(1)}(y_0)|\tilde{A}(\tau)\right]\right]}{\left(\mathbb{E}\left[Y_k^{(1)}(y_0)\right]\right)^2}}. \quad (3.4)$$

W dalszej części rozdziału opisane zostaną metody pozwalające w pewnym stopniu zredukować wielkość (3.4). Jednak wcześniej wprowadzony zostanie model, dzięki któremu możliwa będzie ocena opłacalności wprowadzenia poszczególnych strategii.

3.2 Modelowanie opłacalności

Zakładamy, że na rynku ubezpieczeń na życie i rent życiowych panuje konkurencja doskonała, tj. pojedynczy ubezpieczyciel nie ma wpływu na zachowanie całego rynku. Może za to zarządzać dwiema wielkościami: ryzykiem mierzonym przez współczynnik zmienności wypłat z portfela oraz kosztami ponoszonymi przez klientów, reprezentowanymi przez sumę pojedynczych składek netto. Prowadzi to do sytuacji, w których wprowadzenie strategii redukujących ryzyko mogłoby nie być opłacalne, ponieważ skutkowałoby zbyt dużym podwyższeniem koniecznych opłat. W rezultacie, klienci mogliby przechodzić do konkurencyjnych firm, na czym ucierpiałyby wyniki finansowe przedsiębiorstwa.

Opłacalność strategii inwestycyjnych, będących przedmiotem niniejszej pracy magisterskiej, utożsamimy z użytecznością kardynalną. Stanowi ona abstrakcyjną wielkość, dzięki której możliwe jest uporządkowanie oraz skwantyfikowanie preferencji zakładu ubezpieczeniowego [14]. Do jej analitycznego wyznaczenia wykorzystana zostanie zmodyfikowana funkcja Cobba-Douglasa traktowana w swojej pierwotnej wersji jako funkcja produkcji. W oryginalnym artykule [4] ma ona postać

$$f(x, y) = sx^k y^{1-k}, \quad (3.5)$$

gdzie $x, y, s \in \mathbb{R}_+$, $k \in (0, 1)$.

Modyfikację (3.5), używaną w dalszych częściach niniejszej pracy, stanowi funkcja $u : (0, +\infty)^2 \rightarrow (0, +\infty)$ o wzorze

$$u(r, k) = \frac{1}{r \cdot k}, \quad (3.6)$$

gdzie r to ryzyko mierzone współczynnikiem zmienności, a k to koszty netto ponoszone przez wszystkich właścicieli polis.

Motywacje stojące za wyrażeniem (3.6) są następujące:

- dla ustalonego r preferowane będą strategie o mniejszych wartościach k , ponieważ prowadzą one do większego zainteresowania produktami firmy wśród klientów;
- dla ustalonego k powinny być preferowane strategie z mniejszym r dające lepsze finansowe wyniki przedsiębiorstwa.

Mając matematyczny model preferencji ubezpieczyciela, możliwe jest przejście do opisu poszczególnych rodzajów strategii obniżających ryzyko długowieczności.

3.3 Hedging poprzez czas

Hedging poprzez czas to wariant hedgingu naturalnego, w którym pojedynczą polisę renty życiowej rozszerza się o ubezpieczenie na wypadek śmierci. Idea stojąca za tą strategią jest następująca.

Niech $C_{k+1}^{(p)}$ będzie wysokością wypłaty ubezpieczenia na wypadek śmierci w okresie $[k, k+1)$ w p -tej polisie. Wówczas wartość rozważanej polisy w chwili k będzie miała postać

$$Y_k^{(p)} = wa_{\overline{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}}} + e^{-\left(K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}\right)\delta} C_{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1}^{(p)}.$$

Jej aktuarialna wartość w chwili k wynosi

$$\mathbb{E}\left[Y_k^{(p)}\right] = wa_{x_0+k}(y_0+k) + \sum_{s=0}^{\omega-x_0-k} e^{-(s+1)\delta} C_{s+k+1}^{(p)} \mathbb{P}\left(K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)} = s\right)$$

i w oczywisty sposób jest większa od aktuarialnej wartości przyszłych wypłat w sytuacji bez hedgingu. Spójrzmy teraz na wariancję wartości pojedynczej polisy w chwili k :

$$\text{Var}\left[Y_k^{(p)}\right] = \text{Var}\left[wa_{\overline{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}}}\right] + e^{-\left(K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1\right)} C_{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1}^{(p)}. \quad (3.7)$$

Z elementarnych własności drugiego momentu centralnego wzór (3.7) można zapisać jako:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[Y_k^{(p)}\right] &= \text{Var}\left[wa_{\overline{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}}}\right] + \text{Var}\left[e^{-\left(K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1\right)} C_{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1}^{(p)}\right] + \\ &+ 2\text{Cov}\left[wa_{\overline{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}}}, e^{-\left(K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1\right)} C_{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1}^{(p)}\right]. \end{aligned}$$

Kowariancję między częścią rentową oraz ubezpieczeniową można dalej rozpisać jako:

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left[wa_{\overline{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}}}, e^{-\left(K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1\right)} C_{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1}^{(p)}\right] &= \mathbb{E}\left[wa_{\overline{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}}} \cdot e^{-\left(K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1\right)} \right. \\ &\cdot C_{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1}^{(p)}\left.] - wa_{x_0+k}(y_0+k) \cdot \sum_{s=0}^{\omega-x_0-k} e^{-(s+1)\delta} C_{s+k+1}^{(p)} \mathbb{P}\left(K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)} = s\right). \end{aligned}$$

Łączny moment wypłaty ubezpieczenia i renty wynosi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[wa_{\overline{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}}} \cdot e^{-\left(K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1\right)} C_{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1}^{(p)}\right] &= \\ &= \sum_{s=0}^{\omega-x_0-k} e^{-(2s+1)\delta} \mathbb{P}\left(K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)} > s, K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)} = s\right) = 0, \end{aligned}$$

ponieważ $K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)} > s \wedge K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)} = s$ jest zdarzeniem niemożliwym. Oznacza to, że

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left[wa_{\overline{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}}}, e^{-\left(K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1\right)} C_{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1}^{(p)}\right] &= -wa_{x_0+k}(y_0+k) \cdot \\ &\cdot \sum_{s=0}^{\omega-x_0-k} e^{-(s+1)\delta} C_{s+k+1}^{(p)} \mathbb{P}\left(K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)} = s\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Spróbujemy teraz znaleźć warunek wystarczający do zachodzenia hedgingu. Rozważmy:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[e^{-\left(K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1\right)} C_{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1}^{(p)}\right] &+ 2\text{Cov}\left[wa_{\overline{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}}}, e^{-\left(K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1\right)} \right. \\ &\cdot C_{K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)}+1}^{(p)}\left.] = \sum_{s=0}^{\omega-x_0-k} e^{-2(s+1)\delta} \left(C_{s+k+1}^{(p)}\right)^2 \mathbb{P}\left(K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)} = s\right) - 2wa_{x_0+k}(y_0+k) \cdot \\ &\cdot \sum_{s=0}^{\omega-x_0-k} e^{-(s+1)\delta} C_{s+k+1}^{(p)} \mathbb{P}\left(K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)} = s\right) = \sum_{s=0}^{\omega-x_0-k} \left(\mathbb{P}\left(K_{x_0+k, y_0+k}^{(p)} = s\right) e^{-(s+1)\delta} C_{s+k+1}^{(p)} \right. \\ &\cdot \left. \left[e^{-(s+1)\delta} C_{s+k+1}^{(p)} - 2wa_{x_0+k}(y_0+k)\right]\right). \end{aligned}$$

Jeżeli dla $s = 0, \dots, \omega - x_0 - k$ zachodzi $C_{s+k+1}^{(p)} \left[e^{-(s+1)\delta} C_{s+k+1}^{(p)} - 2wa_{x_0+k}(y_0+k)\right] < 0$, to następuje redukcja wariancji. Możemy na tej podstawie zapisać następujący fakt.

Fakt 1. Warunkiem wystarczającym istnienia hedgingu naturalnego w chwili k jest zachodzenie nierówności

$$C_{s+k+1}^{(p)} \left[e^{-(s+1)\delta} C_{s+k+1}^{(p)} - 2wa_{x_0+k}(y_0 + k) \right] \leq 0 \quad (3.8)$$

dla $s = 0, \dots, \omega - x_0 - k$ oraz $C_{s+k+1}^{(p)} \neq 0$ dla przynajmniej jednego s .

Dowód. Załóżmy, że dla $s = 0, \dots, \omega - x_0 - k$ zachodzi nierówność (3.8) oraz, że dla przynajmniej jednego s mamy $C_{s+k+1}^{(p)} \neq 0$. Oznacza to, że

$$\text{Var} \left[Y_k^{(\text{II})} | l_k(y_0) \right] = l_k(y_0) \text{Var} \left[Y_k^{(1)} \right] \leq l_k(y_0) \text{Var} \left[wa_{\frac{K^{(1)}}{x_0+k, y_0+k}} \right]. \quad (3.9)$$

Jednocześnie, z powodu co najmniej jednego niezerowego benefitu na wypadek śmierci, dla aktuarialnej wartości portfela zachodzi nierówność:

$$l_k(y_0) \mathbb{E} \left[wa_{\frac{K^{(1)}}{x_0+k, y_0+k}} \right] + e^{-\left(K_{x_0+k, y_0+k}^{(1)} \right) \delta} C_{K_{x_0+k, y_0+k}^{(1)}+1}^{(1)} > l_k(y_0) \mathbb{E} \left[wa_{\frac{K^{(1)}}{x_0+k, y_0+k}} \right].$$

Prowadzi to do nierówności

$$\frac{1}{\sqrt{l_k(y_0)}} \frac{\sqrt{\text{Var} \left[Y_k^{(1)}(y_0) \right]}}{\mathbb{E} \left[Y_k^{(1)}(y_0) \right]} < \frac{1}{\sqrt{l_k(y_0)}} \frac{\sqrt{\text{Var} \left[wa_{\frac{K^{(1)}}{x_0+k, y_0+k}} \right]}}{\mathbb{E} \left[wa_{\frac{K^{(1)}}{x_0+k, y_0+k}} \right]}, \quad (3.10)$$

będącej formalną postacią hedgingu.

Z drugiej strony, nierówność (3.10) nie implikuje (3.9), które jest równoważne (3.8). Oznacza to, że prawdziwość (3.8) dla $s = 0, \dots, \omega - x_0 - k$ oraz $C_{s+1}^{(p)} \neq 0$ dla przynajmniej jednego s stanowią warunek dostateczny zachodzenia (3.10), ale nie są jego warunkiem koniecznym, co należało pokazać. □

Należy podkreślić, że Fakt 1 ma charakter pomocniczy. Jeżeli proponowany benefit na wypadek śmierci $C_{s+k+1}^{(p)}$ nie spełnia jego założeń, to prawdziwość nierówności (3.10) należy sprawdzić numerycznie. Może bowiem zajść sytuacja, w której przyrost aktuarialnej wartości w portfelu oraz przyrost wariancji wypłat doprowadzi do zmniejszenia współczynnika zmienności, co jest równoważne redukcji ryzyka.

W dalszej części podrozdziału opisane zostaną metody definiowania wielkości $C_k^{(p)}$ zaproponowane w książce Pitacco et al. [11].

3.3.1 Metoda rezerwy

W tej metodzie wielkość benefitu $C_k^{(p)}$ to matematyczna perspektywna rezerwa na przyszłe wypłaty renty wyceniona przy użyciu technicznej bazy $\{A(\tau), \delta'\}$, gdzie $A(\tau)$ to założenie o ewolucji śmiertelności dla kohorty urodzonej w roku kalendarzowym $\tau = y_0 - x_0$, natomiast δ' to założenie o ewolucji intensywności oprocentowania, tzn.

$$C_k^{(p)} = wa_{x_0+k}^{[A(\tau), \delta']}(y_0 + k). \quad (3.11)$$

Sprawdzimy teraz, przy jakich założeniach tak zdefiniowany benefit może spełniać Fakt 1. Z (3.11) wynika, że $C_{s+k+1}^{(p)} = 0$ tylko dla $s \geq \omega - x_0 - k - 1$. Ponadto, jeżeli $\delta > 0$,

co jest standardowym założeniem, to oczywiście $\delta > -\ln 2$ i równoważnie $e^{-\delta} < 2$. Oznacza to, że nierówność (3.8) sprowadza się do

$$a_{x_0+k+s+1}^{[A(\tau), \delta']} (y_0 + k + s + 1) \leq 2e^\delta a_{x_0+k} (y_0 + k). \quad (3.12)$$

Warunek (3.12) pozwala nałożyć ograniczenia na bazę techniczną $\{A(\tau), \delta'\}$. Na podstawie (3.11) można stwierdzić, że metoda rezerwy jest stosunkowo droga. Jednak, w przypadku odpowiedniego doboru bazy technicznej, powstały hedging jest bardzo silny, na co wskazują eksperymenty numeryczne opisane w Rozdziale 4.

3.3.2 Metoda zwrotu

W tej metodzie benefit $C_k^{(p)}$ definiujemy jako maksimum między saldem renty w chwili śmierci rencisty a zerem, tzn.

$$C_k^{(p)} = \max\{O^{(p)} - (k - 1)w, 0\}, \quad (3.13)$$

gdzie $O^{(p)}$ to pojedyncza opłata referencyjna będąca jednorazową składką (niekoniecznie netto) finansująca rentę życiową w p -tej polisie. Spróbujemy teraz sprawdzić, czy założenia Faktu 1 pozwalają się uprościć jak w przypadku metody rezerwy. Warto zauważyć, że wielkość korzyści zdefiniowanej w (3.13) $C_k^{(p)}$ może być zerem dla wielu k .

Niech $s^*(k) = \min\{s = 0, \dots, \omega - x_0 - k : C_s^{(p)} = 0\}$. Jeżeli $s^*(k) \neq 0$, to hedging może zachodzić w okresie $[0, s^*(k) - 1]$ licząc od chwili k . Oczywiście, jeśli dla jakiegoś $k = 0, \dots, \omega - x_0$ wielkość $s^*(k) = 0$, to od tego momentu mamy w polisie wyłącznie rentę życiową i w związku z tym brak ochrony. Oznacza to, że jednocześnie ta metoda może być tańsza od metody rezerwy.

Niech $s^*(k + 1) \neq 0$. Nierówność (3.8) ma wówczas postać

$$\left(O^{(p)} - (s + k + 1)\right) \left(e^{-(s+1)\delta} \left(O^{(p)} - (s + k + 1)\right) - 2wa_{x_0+k} (y_0 + k)\right) \leq 0$$

dla $s = 0, \dots, s^*(k + 1) - 1$. Podobnie jak wcześniej, dla $\delta > 0$ mamy $e^{-(s+1)\delta} \leq e^{-\delta} < 2$ i ostatecznie (3.8) sprowadza się do

$$O^{(p)} \leq w \left(2e^\delta a_{x_0+k} (y_0 + k) + (s + k + 1)\right). \quad (3.14)$$

Należy podkreślić, że wybór $O^{(p)}$ wpływa na wartość $s^*(k + 1)$, co sprawia dodatkowe trudności przy analitycznym stosowaniu tej metody. W Rozdziale 4. opisano eksperyment numeryczny, który wskazuje, że nawet dla opłaty referencyjnej będącej jednorazową składką netto renty życiowej, występuje niewielka redukcja ryzyka w początkowych latach trwania polisy.

3.4 Hedging poprzez dziedzinę działalności

Hedging poprzez dziedzinę działalności to strategia, w której redukcja ryzyka wiąże się z połączeniem portfeli polis wypłacających przeciwnie działające korzyści. Różni się on od hedgingu poprzez czas tym, że zakłada się niezależność rent i ubezpieczeń od siebie. Zanim zaczniemy analizować poszczególne metody omówimy podstawowe oznaczenia analogiczne do opisanych w Podrozdziale 3.1. Jeżeli jakaś wielkość będzie różna dla portfela polis rent życiowych oraz portfela polis ubezpieczeń na życie, to będziemy je rozróżniać, odpowiednio, przez górny indeks R oraz górny indeks U . W takiej sytuacji portfel wszystkich aktywnych polis możemy zapisać jako sumę mnogościową portfeli aktywnych polis wypłacających poszczególne rodzaje benefitów:

$$\Pi_k(y_0) = \Pi_k^R(y_0) \cup \Pi_k^U(y_0),$$

gdzie $\Pi_k^R(y_0) = \{p \in P^R : K_{x_0^R, y_0}^{(p)} > k\}$ i $\Pi_k^U(y_0) = \{p \in P^U : K_{x_0^U, y_0}^{(p)} > k\}$.

Podobnie, roczne wypłaty z portfela dla $k = 1, \dots, \omega - x_0$, liczonego od y_0 , mają postać

$$W_k^{(\Pi)}(y_0) = W_k^{(\Pi^R)}(y_0) + W_k^{(\Pi^U)}(y_0),$$

gdzie $W_k^{(\Pi^R)}(y_0) = \sum_{p^R \in \Pi_k^R(y_0)} w_k^{(p^R)}(y_0)$ oraz $W_k^{(\Pi^U)}(y_0) = \sum_{p^U \in \Pi_k^U(y_0)} w_k^{(p^U)}(y_0)$.

W dalszej części pracy zakładamy, że wszystkie polisy są homogeniczne ze względu na wysokość rocznej wypłaty wynoszącą w_k^R dla rent życiowych i w_k^U dla ubezpieczeń.

W chwilach $k = 0, 1, \dots, \omega - x_0$, liczonych od roku kalendarzowego y_0 wartość pojedynczej polisy wynosi:

- $Y_k^{(p^R)}(y_0) = w^R a_{\overline{K_{x_0^R, y_0}^{(p^R)}}}$ dla renty życiowej,
- $Y_k^{(p^U)}(y_0) = w^U e^{-\delta(K_{x_0^U, y_0}^{(p^U)} + 1)}$ dla ubezpieczenia na życie.

Obecną wartość przyszłych wypłat z całego portfela można przedstawić jako:

$$\sum_{p^R \in \Pi_k^R(y_0)} Y_k^{(p^R)}(y_0) + \sum_{p^U \in \Pi_k^U(y_0)} Y_k^{(p^U)}(y_0).$$

Dalej, zakładamy, że wszystkie czasy życia trwania życia są niezależne i mają taki sam rozkład w odpowiednich populacjach (mogą być różne dla populacji rencistów i ubezpieczonych). Wówczas, tak jak wcześniej, można uprościć wyrażenia, traktując $Y_k^{(1^R)}(y_0)$ oraz $Y_k^{(1^U)}(y_0)$ jako wartości wypłat pojedynczych polis.

3.4.1 Metoda klasyczna

W tej metodzie oba portfele $\Pi_k^R(y_0)$ i $\Pi_k^U(y_0)$ stanowią zobowiązania pojedynczego ubezpieczyciela. Warunkiem zachodzenia hedgingu w roku $k = 0, \dots, \omega - x_0$ jest nierówność:

$$\frac{\sqrt{\text{Var}\left[L_k^R w_k^R a_{\overline{K_{x_0^R+k, y_0+k}^{(p^R)}}}}\right]}{\mathbb{E}\left[L_k^R w_k^R a_{x_0^R+k}(y_0+k)\right]} > \frac{\sqrt{\text{Var}\left[L_k^R w_k^R a_{\overline{K_{x_0^R+k, y_0+k}^{(p^R)}}}}\right] + \text{Var}\left[L_k^U w_k^U e^{-\left(K_{x_0^U+k, y_0+k}^{(p^U)} + 1\right)}\right]}{\mathbb{E}\left[L_k^R w_k^R a_{x_0^R+k}(y_0+k)\right] + \mathbb{E}\left[L_k^U w_k^U A_{x_0^U+k}(y_0+k)\right]}. \quad (3.15)$$

Warto zauważyć, że w przeciwieństwie do hedgingu poprzez dziedzinę działalności, działanie hedgingu poprzez czas nie zależy od wielkości aktywnego portfela. Wynika to z ujemnej liniowej zależności pomiędzy wypłatami rent oraz ubezpieczeń w tym rodzaju strategii, ponieważ oba kontrakty dotyczą tej samej osoby. Usprawiedliwia to stosowanie empirycznych liczebności kohorty l_k w poprzednim podrozdziale.

Lewa strona nierówności (3.15) nie zależy od wartości w_k^R , co wynika z własności wartości oczekiwanej oraz wariancji. Podnosząc obie strony (3.15) do drugiej potęgi oraz mnożąc je przez iloczyn mianowników, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \text{Var}\left[L_k^R a_{\overline{K_{x_0^R+k, y_0+k}^{(p^R)}}}}\right] \left(\mathbb{E}\left[L_k^R w_k^R a_{x_0^R+k}(y_0+k)\right] + \mathbb{E}\left[L_k^U w_k^U A_{x_0^U+k}(y_0+k)\right]\right)^2 > \\ & > \left(\mathbb{E}\left[L_k^R\right]\right)^2 \left(a_{x_0^R+k}(y_0+k)\right)^2 \left((w_k^R)^2 \text{Var}\left[L_k^R a_{\overline{K_{x_0^R+k, y_0+k}^{(p^R)}}}}\right] + (w_k^U)^2 \text{Var}\left[L_k^U e^{-\left(K_{x_0^U+k, y_0+k}^{(p^U)} + 1\right)}\right]\right). \end{aligned}$$

Rozpiszmy kwadrat sumy z lewej strony ostatniej nierówności:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{E}[L_k^R] w_k^R a_{x_0^R+k}(y_0+k) + \mathbb{E}[L_k^U] w_k^U A_{x_0^U+k}(y_0+k) \right)^2 = \left(\mathbb{E}[L_k^R] w_k^R a_{x_0^R+k}(y_0+k) \right)^2 + \\ & + 2\mathbb{E}[L_k^R] w_k^R a_{x_0^R+k}(y_0+k) \mathbb{E}[L_k^U] w_k^U A_{x_0^U+k}(y_0+k) + \left(\mathbb{E}[L_k^U] w_k^U A_{x_0^U+k}(y_0+k) \right)^2. \end{aligned}$$

Ostatecznie, (3.15) sprowadza się do nierówności kwadratowej zmiennej w_k^U :

$$w_k^U \left(\Theta_k w_k^U + \Upsilon_k \right) > 0, \quad (3.16)$$

gdzie

- $\Theta_k = Var \left[L_k^R a_{\frac{K_{x_0^R+k, y_0+k}}{K_{x_0^R+k, y_0+k}^{(p^R)}}} \right] \left(\mathbb{E}[L_k^U] A_{x_0^U+k}(y_0+k) \right)^2 - \left(\mathbb{E}[L_k^R] a_{x_0^R+k}(y_0+k) \right)^2 \cdot Var \left[L_k^U e^{-\left(K_{x_0^U+k, y_0+k} + 1 \right)} \right],$
- $\Upsilon_k = Var \left[L_k^R a_{\frac{K_{x_0^R+k, y_0+k}}{K_{x_0^R+k, y_0+k}^{(p^R)}}} \right] 2\mathbb{E}[L_k^R] w_k^R a_{x_0^R+k}(y_0+k) \mathbb{E}[L_k^U] A_{x_0^U+k}(y_0+k).$

Równanie $w_k^U \left(\Theta_k w_k^U + \Upsilon_k \right) = 0$ ma dwa pierwiastki: $w_k^U = 0$ oraz $w_k^U = -\frac{\Upsilon_k}{\Theta_k}$, które mogą być takie same, jeżeli $\Upsilon_k = 0$. Wysokości składki w_k^R oraz w_k^U muszą być większe od zera, by mieć sens z finansowego punktu widzenia. Zauważmy, że Υ_k może przyjmować tylko dodatnie wartości dla $k = 0, \dots, \min\{\omega - x_0^R, \omega - x_0^U\}$. Prowadzi to do poniższego faktu o istnieniu strategii hedgingowej.

Fakt 2. Niech Υ_k i Θ_k będą parametrami nierówności (3.16) oraz niech $w_k^R > 0$. Hedging naturalny w metodzie klasycznej działa, dla $k = 0, \dots, \min\{\omega - x_0^R, \omega - x_0^U\}$, jeżeli zachodzi warunek

$$\Theta_k < 0 \quad (3.17)$$

oraz wypłata ubezpieczenia na życie będzie w wysokości $w_k^U \in \left(0, -\frac{\Upsilon_k}{\Theta_k} \right)$.

Nierówność (3.17) sprowadza się do wyrażenia

$$\frac{Var \left[L_k^R a_{\frac{K_{x_0^R+k, y_0+k}}{K_{x_0^R+k, y_0+k}^{(p^R)}}} \right]}{\left(\mathbb{E}[L_k^R] a_{x_0^R+k}(y_0+k) \right)^2} < \frac{Var \left[L_k^U e^{-\left(K_{x_0^U+k, y_0+k} + 1 \right)} \right]}{\left(\mathbb{E}[L_k^U] A_{x_0^U+k}(y_0+k) \right)^2},$$

które, po nałożeniu pierwiastka kwadratowego na obie strony ma postać

$$\frac{\sqrt{Var \left[L_k^R a_{\frac{K_{x_0^R+k, y_0+k}}{K_{x_0^R+k, y_0+k}^{(p^R)}}} \right]}}{\mathbb{E}[L_k^R] a_{x_0^R+k}(y_0+k)} < \frac{\sqrt{Var \left[L_k^U e^{-\left(K_{x_0^U+k, y_0+k} + 1 \right)} \right]}}{\mathbb{E}[L_k^U] A_{x_0^U+k}(y_0+k)}. \quad (3.18)$$

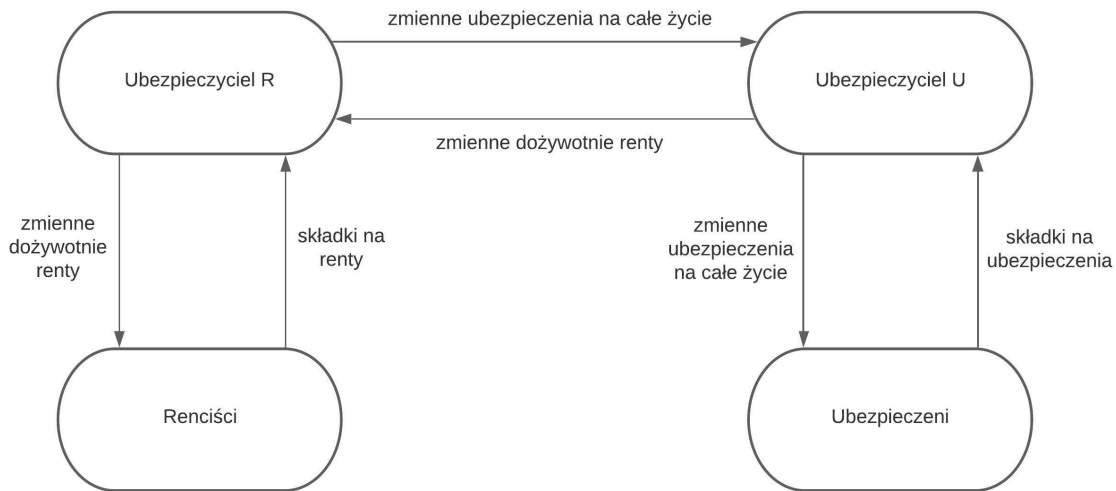
Nierówność (3.18) oznacza, że metoda klasyczna jest skuteczna w sytuacji, gdy współczynnik zmienności przyszłych wypłat z portfela polis ubezpieczeniowych jest większy od współczynnika zmienności przyszłych wypłat z portfela polis życiowych. Może to zachodzić, gdy $x_0^U \ll x_0^R$ i $L_k^U \approx L_k^R$, ponieważ, całkowity czas trwania życia ubezpieczonego będzie dłużej podatny na potencjalne systematyczne zmiany w ewolucji śmiertelności niż całkowity czas trwania życia rencisty.

3.4.2 Swap śmiertelności

Metoda klasyczna hedgingu poprzez dziedzinę działalności ma jedną praktyczną wadę. Mianowicie, ubezpieczyciel musi być odpowiednio duży, by móc ją stosować z powodzeniem. Alternatywnym sposobem na zdobycie ekspozycji na odwrotnie działające kontrakty jest zawarcie umowy swapu śmiertelności. Ten instrument finansowy stanowi przykład derywaty natężenia śmiertelności, do której można również zaliczyć obligację na długowieczność, kontrakt terminowy q -forward i S -forward oraz opcję na współczynnik przeżywalności danej kohorty (LEO) [1], a także opcję na gwarantowaną wysokość renty (GAO) [2]. W tym Podrozdziale zajmiemy się tylko swapem śmiertelności, ponieważ dzięki swojemu mechanizmowi działania może on prowadzić do hedgingu naturalnego.

Nasze rozważania będziemy wzorować głównie na artykule [5], z tą różnicą, że zamiast transformacji Wanga [16], a w związku z tym miary neutralnej na ryzyko \mathbb{Q} , do wyceny swapu wykorzystamy miarę rzeczywistą \mathbb{P} . Załóżmy, że na rynku działa dwóch ubezpieczycieli: R oraz U, posiadających taki sam model ewolucji śmiertelności. Pierwszy z nich specjalizuje się w rentach życiowych i chciałby zredukować współczynnik zmienności swoich przyszłych wypłat poprzez ekspozycję na ubezpieczenia na życie. Drugi działa na odwrót: specjalizuje się w kontraktach z wypłatami na wypadek śmierci i chce hedgować swój portfel instrumentami zależnymi od prawdopodobieństwa przeżycia.

Najpierw zajmiemy się kwestią wyceny derywatywy, a następnie spróbujemy znaleźć warunki, w których rozważany swap zapewnia hedging naturalny obu stronom (dzięki tym warunkom obaj ubezpieczyciele są zmotywowani do podpisania kontraktu; można to porównać osiągnięcia korzyści związanych z przewagą komparatywną w kontrakcie swapu stopy procentowej IRS [17]). Z założenia identyczności modeli ewolucji śmiertelności u obu



Rysunek 5: Schemat działania swapu śmiertelności

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [5]

ubezpieczycieli wynika, że odpowiednio wyceniony kontrakt wymiany powinien spełniać w roku kalendarzowym y_0 poniższe równanie

$$l_0^R \sum_{k=0}^{\omega-x_0^R} w_k^{*R} e^{-(k+1)\delta} {}_{k+1}p_{x_0^R}(y_0) - l_0^U \sum_{k=0}^{\omega-x_0^U} w_k^{*U} e^{-(k+1)\delta} {}_k p_{x_0^U}(y_0) q_{x_0^U+k}(y_0+k) = 0, \quad (3.19)$$

gdzie wielkości w_k^{*R} , w_k^{*U} to odpowiednio wybrane wysokości benefitów wypłacane w kolejnych latach k .

Mając za sobą wycenę kontraktu wymiany śmiertelności możemy przejść do szukania warunków na zachodzenie hedgingu w chwili $k = 1, \dots, \min\{\omega - x_0^R, \omega - x_0^U\}$. Można je formalnie przedstawić w postaci poniższych nierówności:

$$\frac{\sqrt{\text{Var}\left[L_k^R w_k^R a_{x_0^R+k, y_0+k}^{(p^R)}\right]}}{\mathbb{E}[L_k^R] w_k^R a_{x_0^R+k, y_0+k}(y_0+k)} > \frac{\sqrt{\text{Var}\left[L_k^R (w_k^R - w_k^{*R}) a_{x_0^R+k, y_0+k}^{(p^R)}\right] + \text{Var}\left[L_k^U w_k^{*U} e^{-\left(K_{x_0^U+k, y_0+k}^{+1}\right)}\right]}}{\mathbb{E}[L_k^R] (w_k^R - w_k^{*R}) a_{x_0^R+k, y_0+k}(y_0+k) + \mathbb{E}[L_k^U] w_k^{*U} A_{x_0^U+k, y_0+k}(y_0+k)}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\sqrt{\text{Var}\left[L_k^U w_k^U e^{-\left(K_{x_0^U+k, y_0+k}^{+1}\right)}\right]}}{\mathbb{E}[L_k^U] w_k^U A_{x_0^R+k, y_0+k}(y_0+k)} > \frac{\sqrt{\text{Var}\left[L_k^R w_k^{*R} a_{x_0^R+k, y_0+k}^{(p^R)}\right] + \text{Var}\left[L_k^U (w_k^U - w_k^{*U}) e^{-\left(K_{x_0^U+k, y_0+k}^{+1}\right)}\right]}}{\mathbb{E}[L_k^R] w_k^{*R} a_{x_0^R+k, y_0+k}(y_0+k) + \mathbb{E}[L_k^U] (w_k^U - w_k^{*U}) A_{x_0^U+k, y_0+k}(y_0+k)}, \quad (3.21)$$

Podobnie jak w przypadku (3.15) lewe strony powyższych dwóch wyrażeń nie zależą, odpowiednio, ani od wartości w_k^R ani od wartości w_k^U . Nierówność (3.20) opisuje hedging po stronie Ubezpieczyciela R, podczas gdy nierówność (3.21) przedstawia hedging z punktu widzenia Ubezpieczyciela U.

Zauważmy, że nierówność (3.20) to tak naprawdę nierówność (3.15) z tą różnicą, że po prawej stronie zamiast w_k^U znajduje się w_k^{*U} oraz zamiast w_k^R mamy różnicę $w_k^R - w_k^{*R}$ spowodowaną faktem, iż Ubezpieczyciel U finansuje część pierwotnych wypłat Ubezpieczyciela R. Oznacza to, że z Faktu 2 warunki na zachodzenie hedgingu są następujące:

- $w_k^R > w_k^{*R}$;
- $w_k^{*U} \in \left(0, \frac{-\Upsilon_k^*}{\Theta_k}\right)$, gdzie wielkości na prawym krańcu przedziału to:
 - $\Theta_k = \text{Var}\left[L_k^R a_{x_0^R+k, y_0+k}^{(p^R)}\right] \left(\mathbb{E}[L_k^U] A_{x_0^U+k, y_0+k}(y_0+k)\right)^2 - \left(\mathbb{E}[L_k^R] a_{x_0^R+k, y_0+k}(y_0+k)\right)^2 \cdot \text{Var}\left[L_k^U e^{-\left(K_{x_0^U+k, y_0+k}^{+1}\right)}\right]$,
 - $\Upsilon_k^* = \text{Var}\left[L_k^R a_{x_0^R+k, y_0+k}^{(p^R)}\right] 2\mathbb{E}[L_k^R] (w_k^R - w_k^{*R}) a_{x_0^R+k, y_0+k}(y_0+k) \mathbb{E}[L_k^U] A_{x_0^U+k, y_0+k}(y_0+k)$;
- $\Theta_k < 0$.

Tak jak wcześniej, ostatni warunek jest równoważny nierówności (3.18). Oznacza to, że indeks ryzyka dla przyszłych wypłat z portfela Ubezpieczyciela U powinien być większy niż w przypadku Ubezpieczyciela R.

Zajmiemy się teraz warunkami na hedging z punktu widzenia Ubezpieczyciela U. Tak jak w metodzie klasycznej dla rent życiowych, po podniesieniu obu stron nierówności (3.21) do drugiej potęgi oraz po przemnożeniu ich przez iloczyn mianowników dostajemy

$$\begin{aligned} & \text{Var}\left[L_k^U e^{-\left(K_{x_0^U+k, y_0+k}^{+1}\right)}\right] \left(\mathbb{E}[L_k^R] w_k^{*R} a_{x_0^R+k, y_0+k}(y_0+k) + \mathbb{E}[L_k^U] (w_k^U - w_k^{*U}) \cdot \right. \\ & \cdot A_{x_0^U+k, y_0+k}(y_0+k) \left.)\right)^2 > \left(\mathbb{E}[L_k^U]\right)^2 \left(A_{x_0^R+k, y_0+k}(y_0+k)\right)^2 \cdot \\ & \cdot \left(\left(w_k^{*R}\right)^2 \text{Var}\left[L_k^R a_{x_0^R+k, y_0+k}^{(p^R)}\right] + (w_k^U - w_k^{*U})^2 \text{Var}\left[L_k^U e^{-\left(K_{x_0^U+k, y_0+k}^{+1}\right)}\right]\right). \end{aligned}$$

Rozpiszmy kwadrat sumy z lewej strony wcześniej opisanej nierówności:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{E}[L_k^R] w_k^{*R} a_{x_0^R+k}(y_0+k) + \mathbb{E}[L_k^U] (w_k^U - w_k^{*U}) A_{x_0^U+k}(y_0+k) \right)^2 = \left(\mathbb{E}[L_k^R] w_k^R a_{x_0^R+k}(y_0+k) \right)^2 + \\ & + 2\mathbb{E}[L_k^R] w_k^{*R} a_{x_0^R+k}(y_0+k) \mathbb{E}[L_k^U] (w_k^U - w_k^{*U}) A_{x_0^U+k}(y_0+k) + \left(\mathbb{E}[L_k^U] (w_k^U - w_k^{*U}) A_{x_0^U+k}(y_0+k) \right)^2. \end{aligned}$$

Tak jak w przypadku Ubezpieczyciela R, hedging dla Ubezpieczyciela U można przedstawić w postaci nierówności kwadratowej zmiennej w_k^{*R} :

$$w_k^{*R} \left(\Gamma_k w_k^{*R} + \Xi_k \right) > 0, \quad (3.22)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bullet \quad \Gamma_k &= \text{Var} \left[L_k^U e^{-\left(K_{x_0^U+k, y_0+k}^{(p^U)} + 1 \right)} \right] \left(\mathbb{E}[L_k^R] a_{x_0^R+k}(y_0+k) \right)^2 - \left(\mathbb{E}[L_k^U] A_{x_0^R+k}(y_0+k) \right)^2 \cdot \\ & \cdot \text{Var} \left[L_k^R a_{x_0^R+k, y_0+k}^{(p^R)} \right], \\ \bullet \quad \Xi_k &= \text{Var} \left[L_k^U e^{-\left(K_{x_0^U+k, y_0+k}^{(p^U)} + 1 \right)} \right] 2\mathbb{E}[L_k^R] (w_k^U - w_k^{*U}) a_{x_0^R+k}(y_0+k) \mathbb{E}[L_k^U] A_{x_0^U+k}(y_0+k). \end{aligned}$$

Przy założeniu, że $w_k^{*R} > 0$ oraz $w_k^U > w_k^{*U}$ (co zapewnia finansowy sens), dla $k = 0, \dots, \min\{\omega - x_0^R, \omega - x_0^U\}$ wielkość Ξ_k przyjmuje dodatnie wartości, co oznacza, że zbiór rozwiązań (3.22) ma postać $(0, -\frac{\Xi_k}{\Gamma_k})$. Wynika z tego poniższy warunek:

$$\Gamma_k < 0.$$

który, po przekształceniach analogicznych do zastosowanych w metodzie klasycznej, jest równoważny nierówności:

$$\frac{\sqrt{\text{Var} \left[L_k^U e^{-\left(K_{x_0^U+k, y_0+k}^{(p^U)} + 1 \right)} \right]}}{\mathbb{E}[L_k^U] A_{x_0^R+k}(y_0+k)} < \frac{\sqrt{\text{Var} \left[L_k^R a_{x_0^R+k, y_0+k}^{(p^R)} \right]}}{\mathbb{E}[L_k^R] a_{x_0^R+k}(y_0+k)}. \quad (3.23)$$

Wyrażenie (3.23) oznacza, że hedging u Ubezpieczyciela U może zachodzić w sytuacji odwrotnej niż u Ubezpieczyciela R. Potencjalnym skutkiem takiej relacji jest zmniejszenie atrakcyjności tej metody u obu stron kontraktu. Można to utożsamić z traktowaniem swapu jako gry o sumie zerowej [5].

4 Eksperyment numeryczny

Mając opisaną teorię hedgingu naturalnego rent życiowych, spróbujemy zastosować ją na symulacjach komputerowych. Obliczenia będą wzorowane na podstawie 7. rozdziału książki [11] przy zakładanej rocznej intensywności oprocentowania $\delta = 5\%$. Przebieg przeprowadzanego eksperymentu jest następujący:

1. Skonstruowanie technicznego modelu ewolucji śmiertelności na podstawie symulacji trajektorii modelu Lee-Cartera (będzie on w założeniu podobny do modelu stosowanego w [11]).
2. Symulacja całkowitych lat trwania życia członków czterech kohort posiadaczy polis: rencistów w wieku $x_0^R = 65$ i ubezpieczonych w wieku $x_0^U \in \{35, 45, 55\}$, według pojedynczych scenariuszy (rozkładów warunkowych).
3. Wyznaczenie empirycznych indeksów ryzyka dla pojedynczych scenariuszy dla kohorty rencistów w chwili $k = 0$.
4. Wyznaczenie empirycznych indeksów ryzyka oraz opłacalności w sytuacji braku hedgingu dla symulacji z rozkładu bezwarunkowego dla kohorty rencistów.
5. Implementacja metod opisanych w Rozdziale 3. oraz powtórzenie obliczeń z punktu 4. tym razem z zastosowaniem hedgingu.

Na końcu rozdziału nastąpi porównanie wszystkich opisanych wcześniej strategii, w tym zakładającej brak hedgingu.

4.1 Model techniczny ewolucji śmiertelności

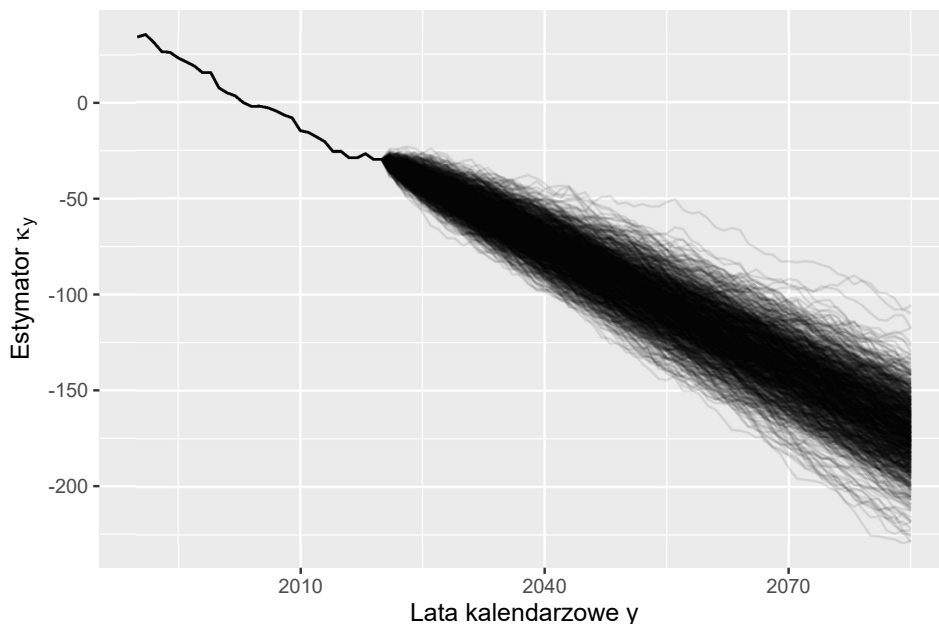
W ogólności można wyróżnić dwa podejścia do modelowania ewolucji śmiertelności w czasie [11]:

- dynamiczne, w którym wielkości takie jak natężenie śmiertelności czy prawdopodobieństwo przeżycia określonej liczby lat są traktowane jako proces stochastyczny;
- statyczne, gdzie wielkości takie jak wyżej wspomniane są traktowane jako scenariusze o określonych założeniach.

Model techniczny ewolucji śmiertelności, użyty do przeprowadzenia eksperymentu numerycznego, ma w założeniu przypominać model użyty w Rozdziale 7. [11]. Oznacza to, że należy przejść z modelu Lee-Cartera, wykorzystującego podejście dynamiczne, na model wykorzystujący podejście statyczne.

W powyżej opisanym celu wygenerowano 1 000 000 trajektorii składnika k_y modelu Lee-Cartera na 65 lat w przód: od 2020 do 2085 roku. Ten wybór horyzontu czasowego jest spowodowany ustaleniem wieku $x_0^U = 35$ dla najmłodszej kohorty oraz $\omega = 100$, co wynika z ograniczeń założonych podczas kalibracji opisanej w Podrozdziale 2.2.

Rysunek 6 przedstawia 1 000 pierwszych wysymulowanych trajektorii. W celu zwiększenia jego czytelności zdecydowano się przedstawić linie interpolacyjne dla pojedynczych scenariuszy. Faktyczne symulacje znajdują się w punktach załamania krzywych.



Rysunek 6: Tysiąc pierwszych wysymulowanych trajektorii procesu κ_y

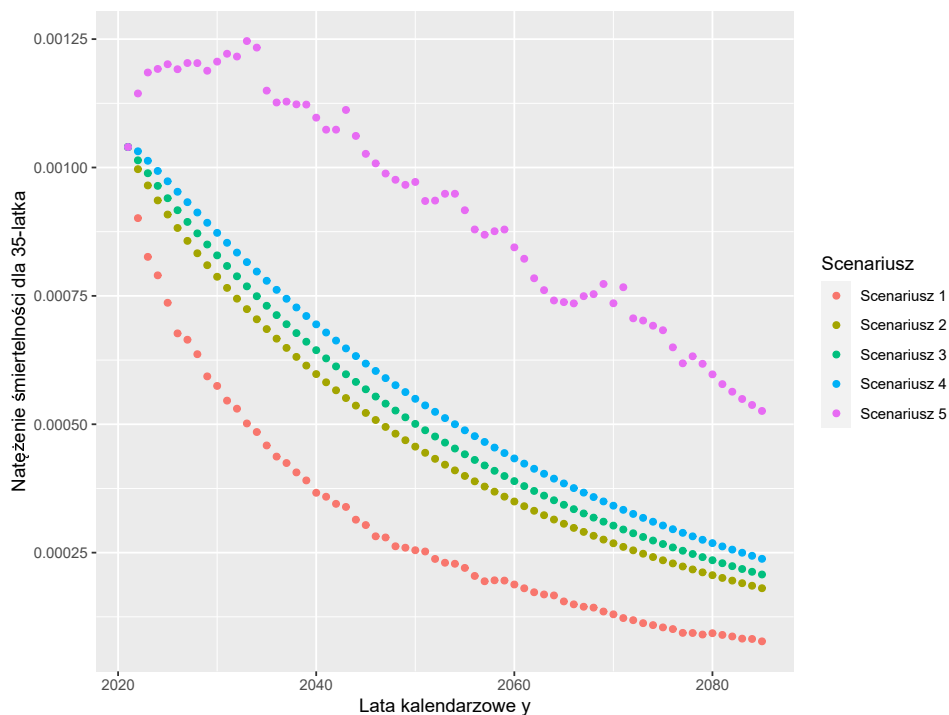
Źródło: Opracowanie własne

Na podstawie wcześniej opisanych symulacji wyznaczono 5 technicznych scenariuszy ewolucji κ_y w czasie, będących następującymi statystykami cięć wygenerowanych trajektorii na współrzędnych $y = 2020, \dots, 2085$:

- 1. scenariusz: minimum,
- 2. scenariusz: pierwszy kwartyl,
- 3. scenariusz: mediana,
- 4. scenariusz: trzeci kwartyl,
- 5. scenariusz: maksimum.

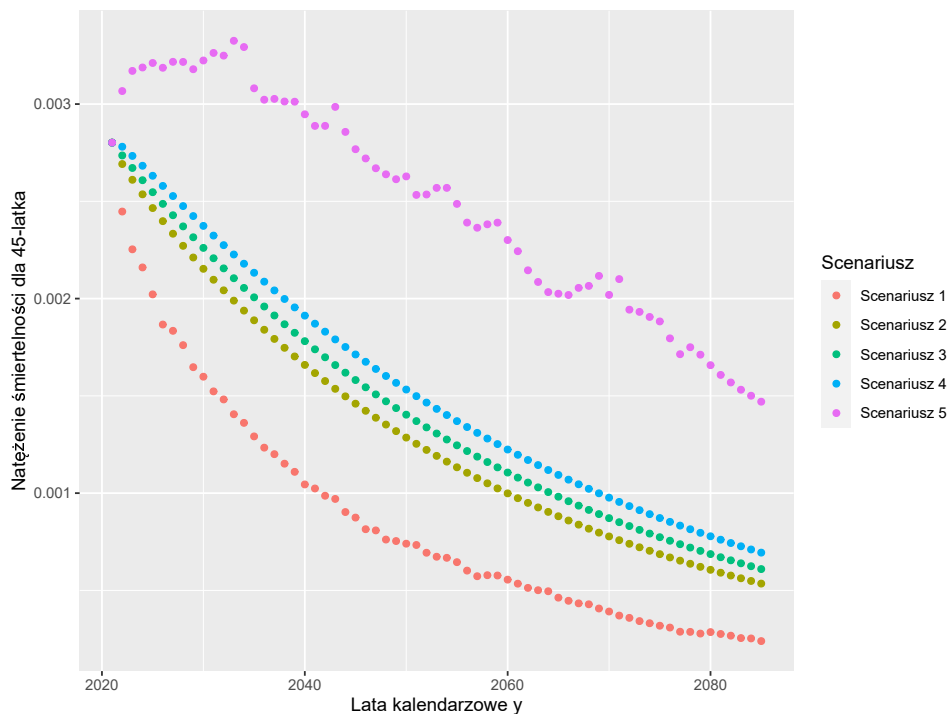
Następnie, korzystając z wyżej wspomnianych technicznych scenariuszy ewolucji κ_y oraz estymatorów $\hat{\alpha}_x$ i $\hat{\beta}_x$ z Rozdziału 2., obliczono prognozowane tablice natężeń śmiertelności. Rysunki 7, 8, 9 i 10 przedstawiają przewidywane natężenia śmiertelności dla, odpowiednio, 35-latków, 45-latków, 55-latków oraz 65-latków w kolejnych latach wybranego horyzontu czasowego.

Natężenia dla wszystkich wieków zachowują się podobnie w czasie. Można zauważyć, że wartości parametru $\mu_x(y)$ wzrastają wraz z wiekiem. W Scenariuszach 1 oraz 5 występują fluktuacje. Mogą one modelować okresy wojen, kataklizmów oraz zajścia nagłych innowacji w dziedzinie medycyny czy bezpieczeństwa, których nie biorą pod uwagę pozostałe scenariusze. Warto nadmienić, że w przypadku Scenariusza 5 natężenia śmiertelności mają tendencję wzrostową dla pierwszych kilkunastu lat prognozy. Możemy to interpretować w taki sposób, iż zwiększenie śmiertelności w tym okresie może być spowodowane zmianami klimatycznymi, których wpływ później stabilizuje się w wyniku postępu technicznego.



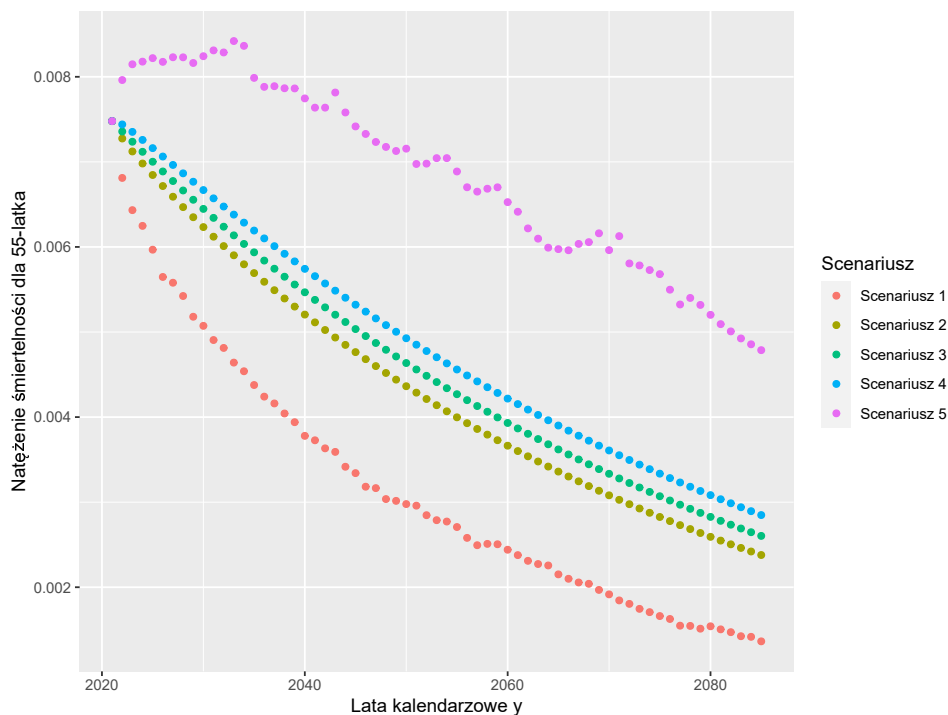
Rysunek 7: Prognozowane natężenia śmiertelności dla 35-latków według technicznych scenariuszy w 2020 roku

Źródło: Opracowanie własne



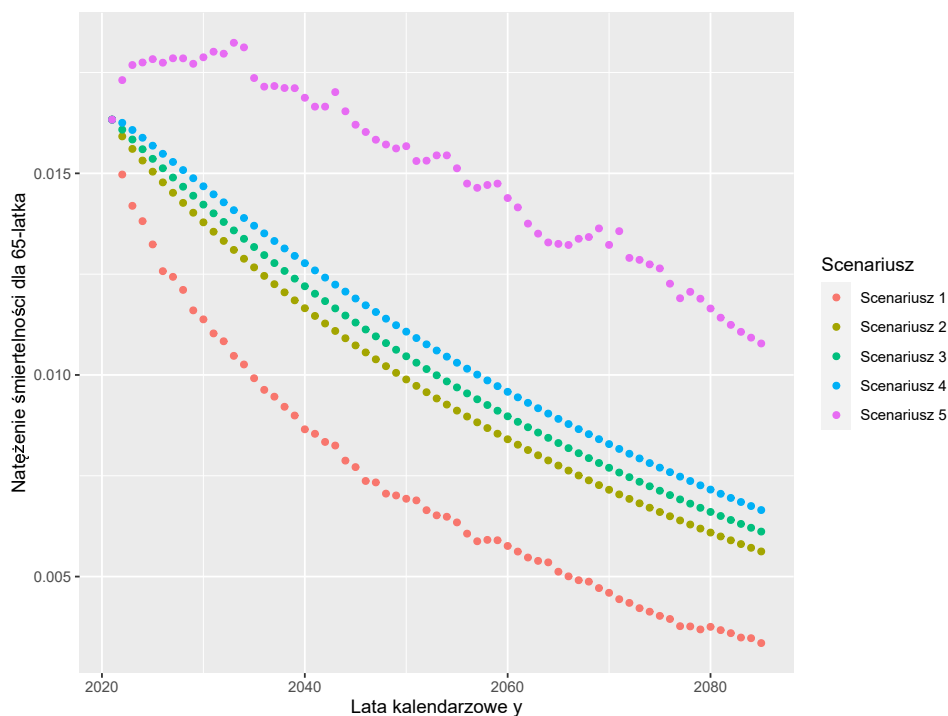
Rysunek 8: Prognozowane natężenia śmiertelności dla 45-latków według technicznych scenariuszy w 2020 roku

Źródło: Opracowanie własne



Rysunek 9: Prognozowane natężenia śmiertelności lat dla 55-latków według technicznych scenariuszy w 2020 roku

Źródło: Opracowanie własne



Rysunek 10: Prognozowane natężenia śmiertelności lat dla 65-latków według technicznych scenariuszy w 2020 roku

Źródło: Opracowanie własne

Kolejnym krokiem jest obliczenie prawdopodobieństw przeżycia określonej liczby lat dla wszystkich czterech kohort w roku kalendarzowym 2020 według poszczególnych scenariuszy. Są one przedstawione na Rysunkach 11, 12, 13 i 14. Wykresy funkcji przeżycia u obu kohort mają kształt odwróconej sigmoidy. Patrząc na scenariusze według malejącego indeksu, możemy zauważyć zjawisko podobne do rektangularyzacji funkcji przeżycia [11]. Odpowiada ono za przybliżanie kształtu wykresu do prostokąta, i jest spowodowane tym, że w miarę zmniejszania się natężenia śmiertelności, momenty śmierci koncentrują się na coraz węższych zakresach wieków. Widać to szczególnie na Rysunku 11 przy porównaniu Scenariusza 1 i 5.

Z prawdopodobieństw przeżycia k lat ${}_k p_{x_0}(y_0)$ można wyznaczyć pozostałe istotne prawdopodobieństwa takie jak prawdopodobieństwo śmierci w przeciągu k lat ${}_k q_{x_0}(y_0)$ czy dożycia $k - 1$ lat i śmierci w następnym roku kalendarzowym ${}_{k-1} q_{x_0}(y_0)$, które zostaną wykorzystane do wyceny interesujących nas polis ubezpieczeniowych.

4.2 Symulacje całkowitych czasów trwania życia

Do symulacji całkowitych czasów trwania życia wykorzystano algorytm ITM-d [13]. Całkowity czas trwania życia x_0 -latka w roku kalendarzowym y_0 ma rozkład zadany funkcją prawdopodobieństwa $\mathbb{P}(K_{x_0, y_0} = k) = {}_k q_{x_0}(y_0) = p_k$.

Rysunek 15 pokazuje schemat blokowy rozważanego algorytmu. Na potrzeby eksperymentu wygenerowano po 500 000 momentów śmierci na kohortę, po 100 000 na scenariusz, co powinno zapewnić wystarczająco dużą próbę do zaobserwowania działania strategii hedgingowych opisanych w Rozdziale 3.

4.3 Empiryczne wyniki dla pojedynczych scenariuszy w sytuacji braku hedgingu

Następnym etapem eksperymentu, po konstrukcji modelu technicznego i wygenerowaniu momentów śmierci, jest wyznaczenie indeksu ryzyka oraz opłacalności w sytuacji braku stosowania metod hedgingu naturalnego dla pojedynczych scenariuszy oraz ich porównanie.

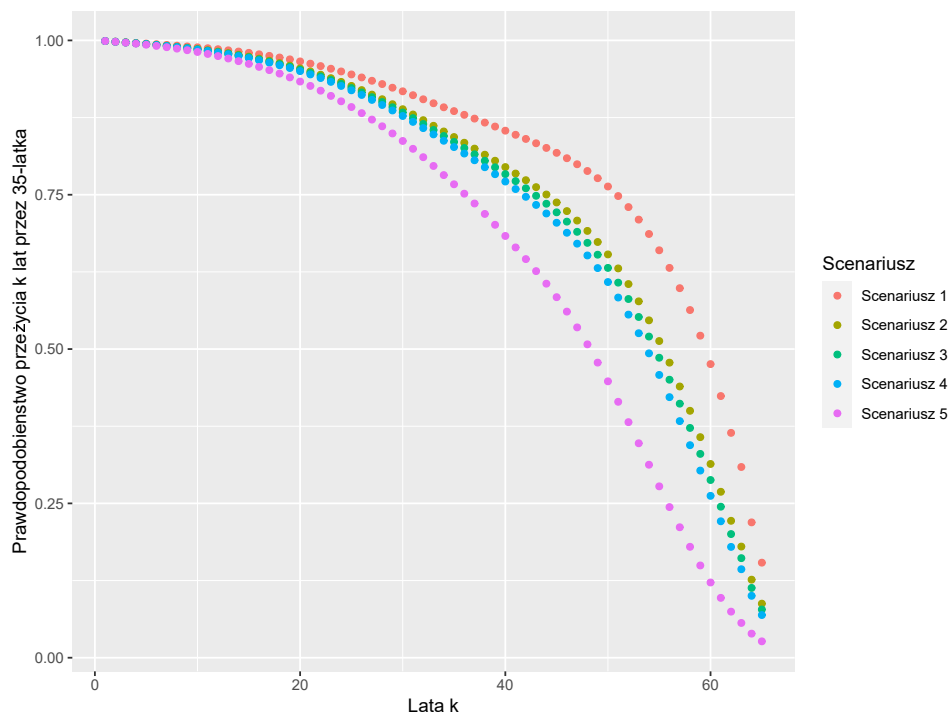
W poniższej tabeli przedstawiono średnią i wariancję wypłat pojedynczych polis oraz współczynniki zmienności wypłat wyrażone w procentach, a także opłacalność działalności. Wszystkie wielkości są obliczone na chwilę $k = 0$.

Tabela 1: Empiryczne wyniki dla pojedynczych scenariuszy w sytuacji bez hedgingu

	Scenariusz 1	Scenariusz 2	Scenariusz 3	Scenariusz 4	Scenariusz 5
Średnia	12.64616	11.95182	11.83602	11.71835	10.96842
Wariancja	19.66734	19.38444	19.29047	19.18063	18.13302
Indeks ryzyka (%)	0.1108956	0.1164911	0.1173453	0.1181857	0.1227697
Opłacalność	7.495413e-4	7.549654e-4	7.568197e-4	7.589647e-4	7.806041e-4

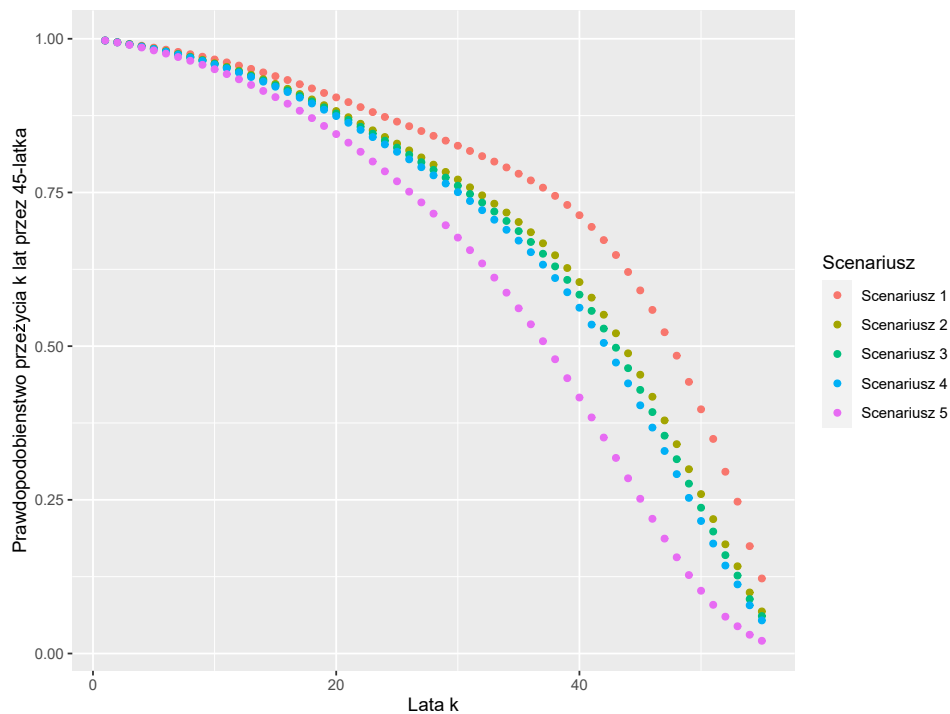
Źródło: Opracowanie własne

Możemy zauważyć, że średnia zmniejsza się wraz ze wzrostem indeksu scenariusza. Taką samą zależność można zauważyć dla wariancji. Obie relacje są spowodowane zmniejszaniem się prawdopodobieństw przeżycia. W przypadku indeksu ryzyka oraz opłacalności jest na odwrót, tzn. zwiększenie indeksu scenariusza powoduje zwiększenie ich wartości. Zachowanie pierwszej z tych dwóch wielkości może być powiązane z efektem analogicznym



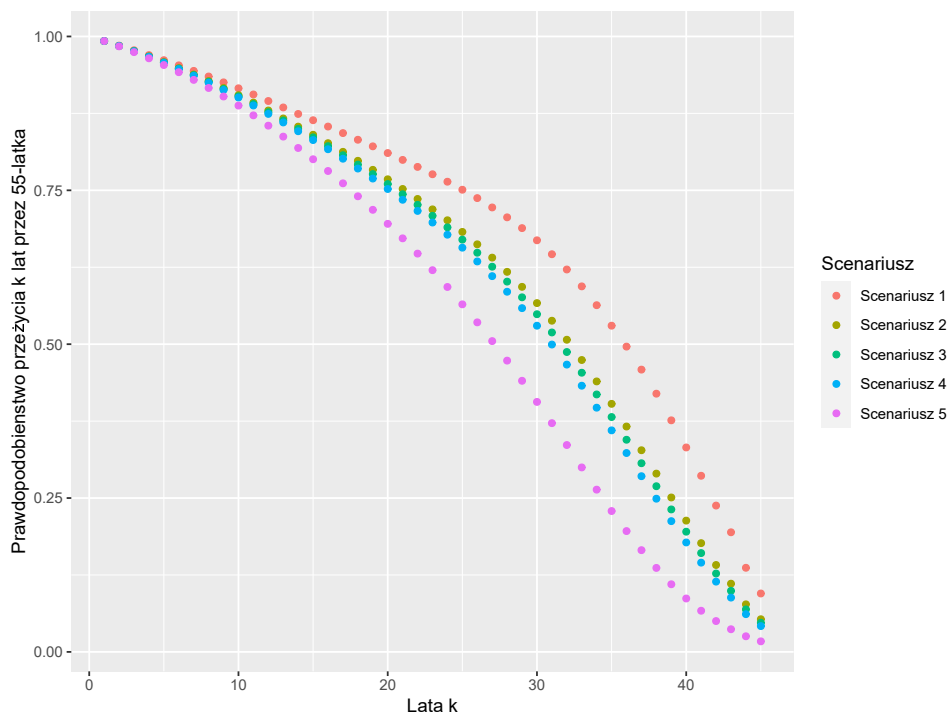
Rysunek 11: Prognozowane prawdopodobieństwo przeżycia przez 35-latków k lat w 2020 roku według technicznych scenariuszy

Źródło: Opracowanie własne



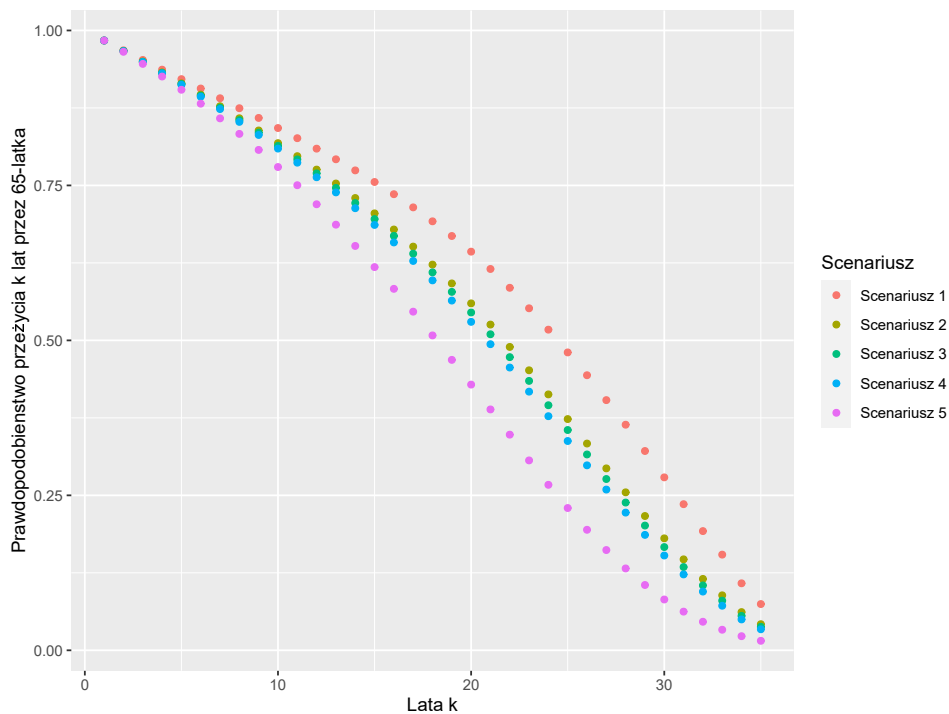
Rysunek 12: Prognozowane prawdopodobieństwo przeżycia przez 45-latków k lat w 2020 roku według technicznych scenariuszy

Źródło: Opracowanie własne



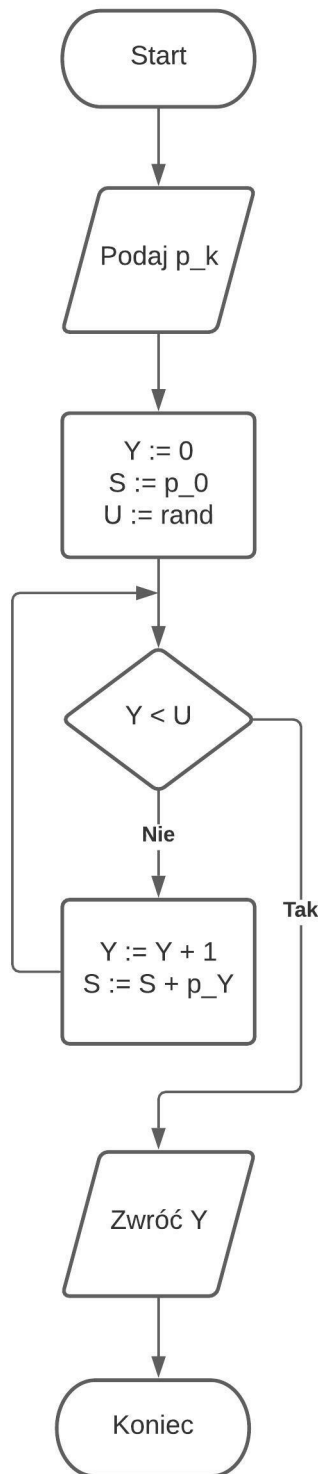
Rysunek 13: Prognozowane prawdopodobieństwo przeżycia przez 55-latków k lat w 2020 roku według technicznych scenariuszy

Źródło: Opracowanie własne



Rysunek 14: Prognozowane prawdopodobieństwo przeżycia przez 65-latków k lat w 2020 roku według technicznych scenariuszy

Źródło: Opracowanie własne



Rysunek 15: Schemat blokowy algorytmu ITM-d

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [13]

do rektangularyzacji funkcji przeżycia opisanym w Podrozdziale 4.1. Natomiast druga zmiana ma ekonomiczną interpretację. Polega ona na tym, że zwiększona śmiertelność powoduje skrócenie średniego okresu wypłaty renty, a przez to zmniejszenie zobowiązań ubezpieczyciela, przy jednoczesnym obniżeniu oferowanej jednorazowej składki netto.

4.4 Empiryczne wyniki w sytuacji braku hedgingu z rozkładem bezwarunkowym

Mając wyniki dla pojedynczych scenariuszy ewolucji śmiertelności, przeprowadzono obliczenia wielkości bezwarunkowych. Na początku zdefiniowano naiwny rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze założeń. Scenariuszom 1 i 5 przyporządkowano najmniejszą wagę $\frac{1}{10}$, scenariuszom 2 i 4 wagę $\frac{1}{5}$, a scenariuszowi 3 najwyższą wagę $\frac{2}{5}$.

Poniższa tabela przedstawia obliczone wartości poszczególnych wielkości, które będą stanowiły punkt odniesienia w analizie strategii hedgingowych. W przeciwieństwie do Podrozdziału 4.3 średnia i wariancja dotyczą całego portfela, a nie pojedynczej polisy.

Tabela 2: Empiryczne wyniki w sytuacji bez hedgingu dla rozkładu bezwarunkowego

Średnia	Wariancja	Indeks ryzyka (%)	Opłacalność
1182990	1465111739	3.235596	2.746155e-05

Źródło: Opracowanie własne

Na koniec porównano empiryczny współczynnik zmienności z granicą (3.4). Różnica pomiędzy obiema wielkościami stanowi 0.06561942 procent wartości (3.4). Taka mała liczba zdaje się potwierdzać działanie efektu łączenia ryzyk.

4.5 Empiryczne wyniki strategii hedgingowych

4.5.1 Metoda rezerwy

W metodzie rezerwy do zdefiniowania benefitu na wypadek śmierci wybrano 5 scenariuszy ewolucji śmiertelności, które są jednocześnie rozważane w modelu technicznym, oraz natężenie oprocentowania identyczne jak w przypadku wyceny rent życiowych.

W poniższej tabeli podane są empiryczne wyniki otrzymane na podstawie wykonanych symulacji. Wszystkie wielkości dotyczą całego portfela polis.

Tabela 3: Empiryczne wyniki dla metody rezerwy

	Scenariusz 1	Scenariusz 2	Scenariusz 3	Scenariusz 4	Scenariusz 5
Średnia	1448994	1415447	1410042	1404628	1371486
Wariancja	268547741	362452776	379413587	396926820	516737792
Indeks ryzyka (%)	1.130952	1.34503	1.381416	1.418385	1.657462
Redukcja ryzyka (%)	65.04657	58.41116	57.30567	56.16312	48.77413
Opłacalność	6.414467e-05	5.43442e-05	5.333898e-05	5.206432e-05	4.518074e-05

Źródło: Opracowanie własne

Średnia wypłata z portfela maleje wraz ze wzrostem indeksu scenariusza. Jest to spowodowane, tak jak w Podrozdziale 4.3., malejącymi prawdopodobieństwami przeżycia, wykorzystanymi do wyceny benefitu na wypadek śmierci.

Wariancja zachowuje się na odwrót. Jest to najprawdopodobniej spowodowane powiązaniem wielkości ubezpieczenia ze średnimi wartościami rent niezrealizowanych w wyniku śmierci właściciela polisy. Założenie mniejszych śmiertelności może zapewnić ochronę przed zbyt długimi okresami wypłacania polis w porównaniu do zakładanych wielkości.

Indeks ryzyka zachowuje się podobnie do wariancji, co pociąga za sobą redukcję ryzyka, która dla wszystkich scenariuszy wynosi ponad 48%, w tym aż około 65% (!) dla Scenariusza 1. Tak silny hedging wpływa też na opłacalność. Pomimo rosnących kosztów

netto, rośnie ona wraz ze zmniejszaniem indeksu scenariusza.

4.5.2 Metoda zwrotu

W metodzie zwrotu przy definicji benefitu na wypadek śmierci użyto pięciu wariantów opłaty referencyjnej. W każdym przypadku rozważano jednorazową składkę obliczoną według zasady wartości oczekiwanej [3]:

$$O^{(p)} = (1 + \theta)a_{x_0}(y_0),$$

gdzie θ to narzut bezpieczeństwa. W kolejnych wariantach, zaczynając od Wariantu 1 i kończąc na Wariacie 5, narzut θ wynosi odpowiednio 0%, 10%, 25%, 50% oraz 90%.

W poniższej tabeli podane są empiryczne wyniki otrzymane na podstawie wykonanych symulacji. Wszystkie wielkości dotyczą całego portfela polis.

Tabela 4: Empiryczne wyniki dla metody zwrotu

	Wariant 1	Wariant 2	Wariant 3	Wariant 4	Wariant 5
Średnia	1307608	1334575	1380595	1474646	1676295
Wariancja	916680899	773176294	541263310	182659426	69855243
Indeks ryzyka (%)	2.3154285	2.0835127	1.6851479	0.9165016	0.4985964
Redukcja ryzyka (%)	28.438895	35.606533	47.918477	71.674415	84.590280
Opłacalność	3.349176e-05	3.669916e-05	4.434557e-05	7.809872e-05	1.326029e-04

Źródło: Opracowanie własne

Średnia wypłata z portfela rośnie wraz z indeksem wariantu, co wynika ze wzrostu wielkości wypłacanych ubezpieczeń.

Wariancja zachowuje się odwrotnie. Jest to spowodowane mechanizmem analogicznym do metody rezerwy z tą różnicą, że w przypadku metody zwrotu benefit na wypadek śmierci może stać bezwartościowy na długo przed teoretycznym osiągnięciem maksymalnego wieku życia przez posiadacza polisy.

Tak samo jak dla metody rezerwy, indeks ryzyka maleje wraz ze wzrostem wysokości wypłat ubezpieczeń, co pociąga za sobą zwiększenie jego redukcji od ok. 28% do ponad 84% (!). Opłacalność rośnie wraz z indeksem wariantu, co oznacza że zwiększanie wielkości benefitu na wypadek śmierci do pewnego poziomu może być rentowne dla ubezpieczyciela.

4.5.3 Metoda klasyczna

W metodzie klasycznej rozważano trzy warianty x_0^U : 35, 45 i 55 skończonych lat życia. Wielkości w_k^U zdefiniowano jako środki przedziałów $(0, -\frac{r_k}{\Theta_k})$.

W Tabeli 5 podane są empiryczne wyniki otrzymane na podstawie wykonanych symulacji. Wszystkie wielkości dotyczą całego portfela polis.

Zarówno średnia jak i wariancja rosną wraz z wiekiem ubezpieczonych, co jest spowodowane zwiększeniem prawdopodobieństw zgonu w początkowych latach trwania kontraktów.

Patrząc na indeks ryzyka, możemy zauważyć jego zmniejszanie się wraz ze zwiększaniem się x_0^U , co pociąga za sobą wzrost redukcji ryzyka. Opłacalność rośnie wraz z wiekiem ubezpieczonych, co oznacza, iż w sytuacji gdy ubezpieczyciel działa zarówno na rynku rent życiowych jak i ubezpieczeń na życie, to powinien on oferować kontrakty ubezpieczeniowe osobom w wieku zbliżonym do wieku właścicieli polis rentowych ale niższym.

Tabela 5: Empiryczne wyniki dla metody klasycznej

	Wiek 35	Wiek 45	Wiek 55
Średnia	1246130	1289174	1374236
Wariancja	1558057552	1625238334	1770999582
Indeks ryzyka (%)	3.167587	3.127137	3.062301
Redukcja ryzyka (%)	2.101921	3.352073	5.355892
Opłacalność	2.777807e-05	2.796264e-05	2.831224e-05

Źródło: Opracowanie własne

4.5.4 Swap śmiertelności

Dla swapu śmiertelności, podobnie jak w przypadku metody klasycznej, rozważano 3 warianty x_0^U : 35, 45 i 55 skończonych lat życia. Na potrzeby eksperymentu we wszystkich wariantach ustalono $w_k^{*R} = 0.05$.

W Tabeli 6 podane są empiryczne wyniki otrzymane na podstawie wykonanych symulacji. Wszystkie wielkości dotyczą całego portfela polis.

Tabela 6: Empiryczne wyniki dla swapu śmiertelności

	Wiek 35	Wiek 45	Wiek 55
Średnia	1182990	1182990	1182990
Wariancja	1403832471	1371950469	1351523678
Indeks ryzyka (%)	3.167208	3.131037	3.107641
Redukcja ryzyka (%)	2.11362	3.231537	3.954625
Opłacalność	2.788514e-05	2.822686e-05	2.845435e-05

Źródło: Opracowanie własne

Średnia wypłata z portfela jest taka sama dla wszystkich skończonych lat życia, co wynika z tego, że kontrakt w chwili 0 ma wartość 0. Wariancja zmniejsza się wraz ze wzrostem wieku ubezpieczonych. Jest to najprawdopodobniej spowodowane stałą wartością w_k^{*R} oraz odpowiednio dobranymi wielkościami w_k^{*U} , które stanowią środki przedziałów $(0, -\frac{\Upsilon_k^*}{\Theta_k^*})$. Podobnie jak dla metody klasycznej indeks ryzyka maleje wraz ze wzrostem wieku ubezpieczonych, co prowadzi do silniejszej redukcji ryzyka.

Opłacalność rośnie wraz z wiekiem ubezpieczonych, zatem Ubezpieczycielowi R powinno zależeć na tym, by podpisać kontrakt z Ubezpieczycielem U posiadającym portfel polis dotyczących kohorty zbliżonej do kohorty rencistów pod względem wieku ale młodszej.

5 Wnioski

W tej sekcji zajmiemy się syntezą wyników dla poszczególnych strategii otrzymanych w eksperymencie numerycznym i na jej podstawie wyciągniemy wnioski pozwalające podsumować niniejszą pracę.

Rysunki 16-20 przedstawiają najważniejsze bezwarunkowe wielkości wyznaczone w Rozdziale 4., tj. średnią i wariancję wypłat z portfela, indeks ryzyka i jego redukcję oraz opłacalność. Czarna pozioma linia pokazuje poziom wartości dla braku hedgingu i ułatwia graficzne porównanie tej strategii z pozostałymi.

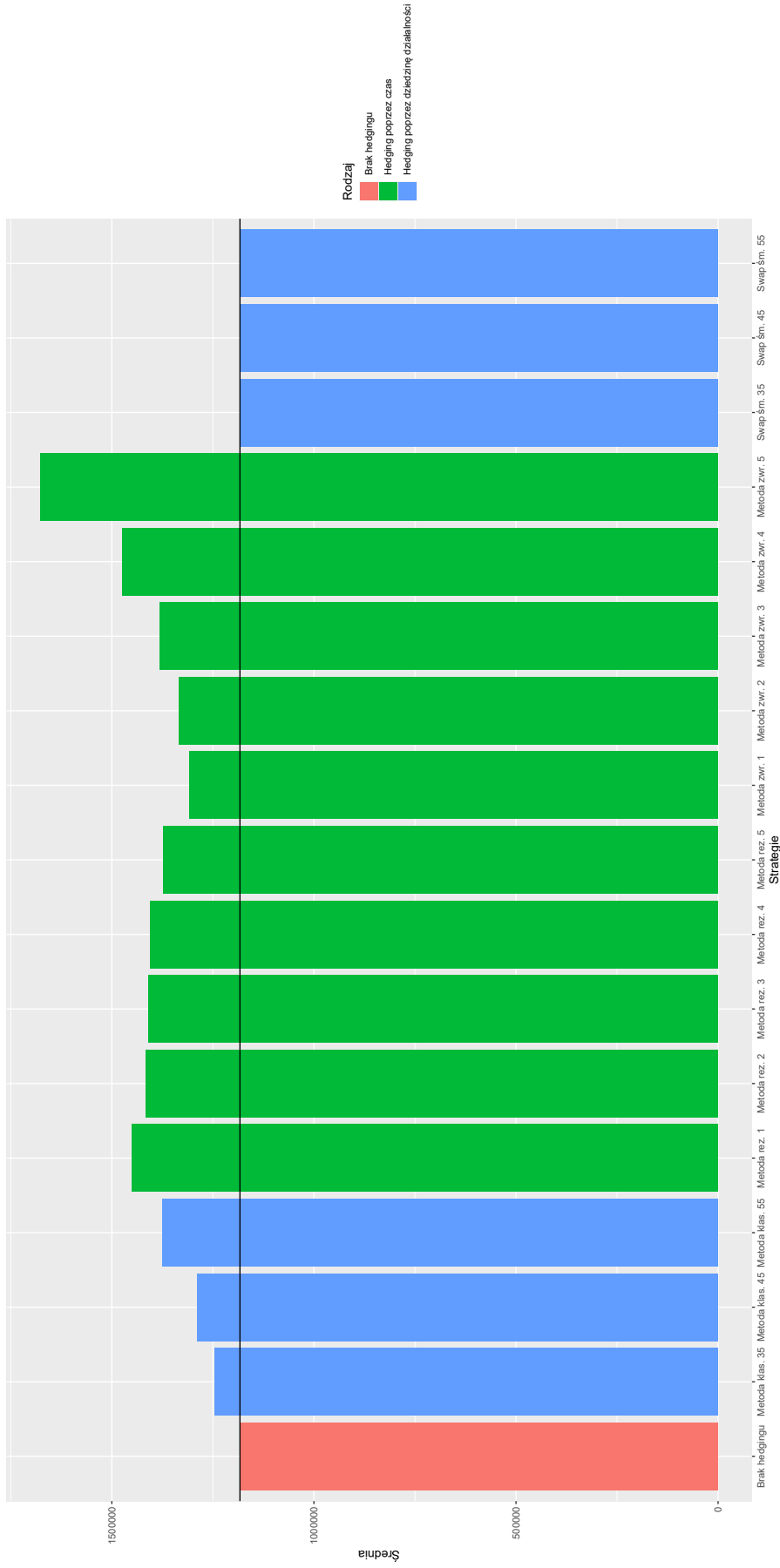
Zacznijmy od średniej. Na Rysunku 16 widać, że dla zdecydowanej większości strategii hedgingowych jest ona wyższa niż w przypadku braku zabezpieczenia. Stanowi to naturalny efekt tego, że w przypadku hedgingu poprzez czas oraz metody klasycznej do oryginalnej polisy dodajemy nieujemne benefity i polisy z dodatnią wartością. Inaczej jest dla swapu śmiertelności, który dotyka linii benchmarkowej. Wynika to ze sposobu w jaki wycenia się ten kontrakt, tzn. jego wartość w chwili 0 powinna być zerowa. Możemy też zauważyć, że wartości dla metod hedgingu poprzez czas przewyższają w większości przypadków wartości dla hedgingu poprzez dziedzinę działalności.

Na Rysunku 17 możemy porównać wariancję wypłat z portfela. Widać, że tylko w przypadku metody klasycznej następuje jej zwiększenie. Wynika to z tego, iż w tej strategii portfele rent życiowych oraz ubezpieczeń na życie są niezależne, a zatem wariancja ich sumy jest sumą wariancji poszczególnych portfeli. Dla hedgingu poprzez czas występuje redukcja tej charakterystyki, co stanowi jeden z rezultatów Faktu 1., który jest spełniony przez wszystkie wersje metody rezerwy oraz zwrotu. Obniżenie wariancji zachodzi również dla swapu śmiertelności, chociaż nie jest ono tak silne, jak dla hedgingu poprzez czas.

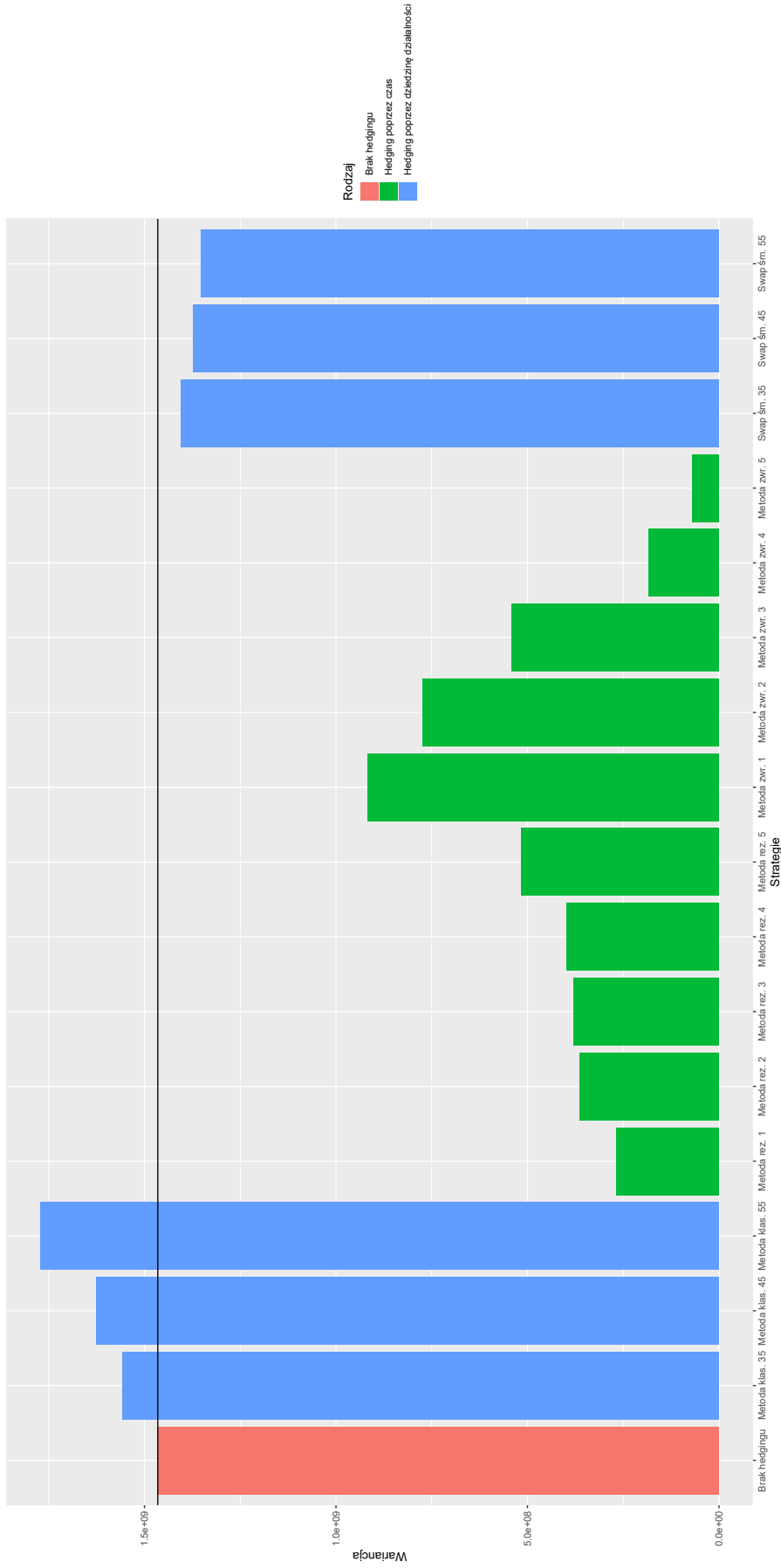
Przejdziemy teraz do indeksu ryzyka. Na Rysunku 18 widać, że dla każdej strategii hedgingowej rzeczywiście występuje zmniejszenie jego wartości. Metody hedgingu poprzez dziedzinę działalności są wyraźnie słabsze od metod hedgingu poprzez czas. W przypadku metody klasycznej obniżenie indeksu ryzyka następuje w wyniku zwiększenia się jego licznika i mianownika, przy czym pierwszy z nich rośnie wolniej od drugiego. Dla swapu śmiertelności zasada działania jest inna. Współczynnik zmienności zmniejsza się, ponieważ jego licznik maleje, ale mianownik pozostaje taki sam. Hedging poprzez czas ma natomiast jeszcze inny mechanizm. Indeks ryzyka zmniejsza się przez jednoczesną redukcję odchylenia standardowego i zwiększenie średniej wypłaty z portfela, co daje najlepsze rezultaty.

Rysunek 19 przedstawia procentową redukcję ryzyka dla strategii hedgingowych. Metoda klasyczna i swap śmiertelności dają gorsze wyniki w porównaniu do metody rezerwy i zwrotu. Dla hedgingu poprzez czas w aż sześciu strategiach na dziesięć obniżenie ryzyka wyniosło ponad 50%, a w najlepszym wypadku ponad 80%! Warto odnotować, że dla hedgingu poprzez czas redukcja ryzyka zwiększa się wraz ze wzrostem wysokości benefitów wypłacanych na wypadek śmierci.

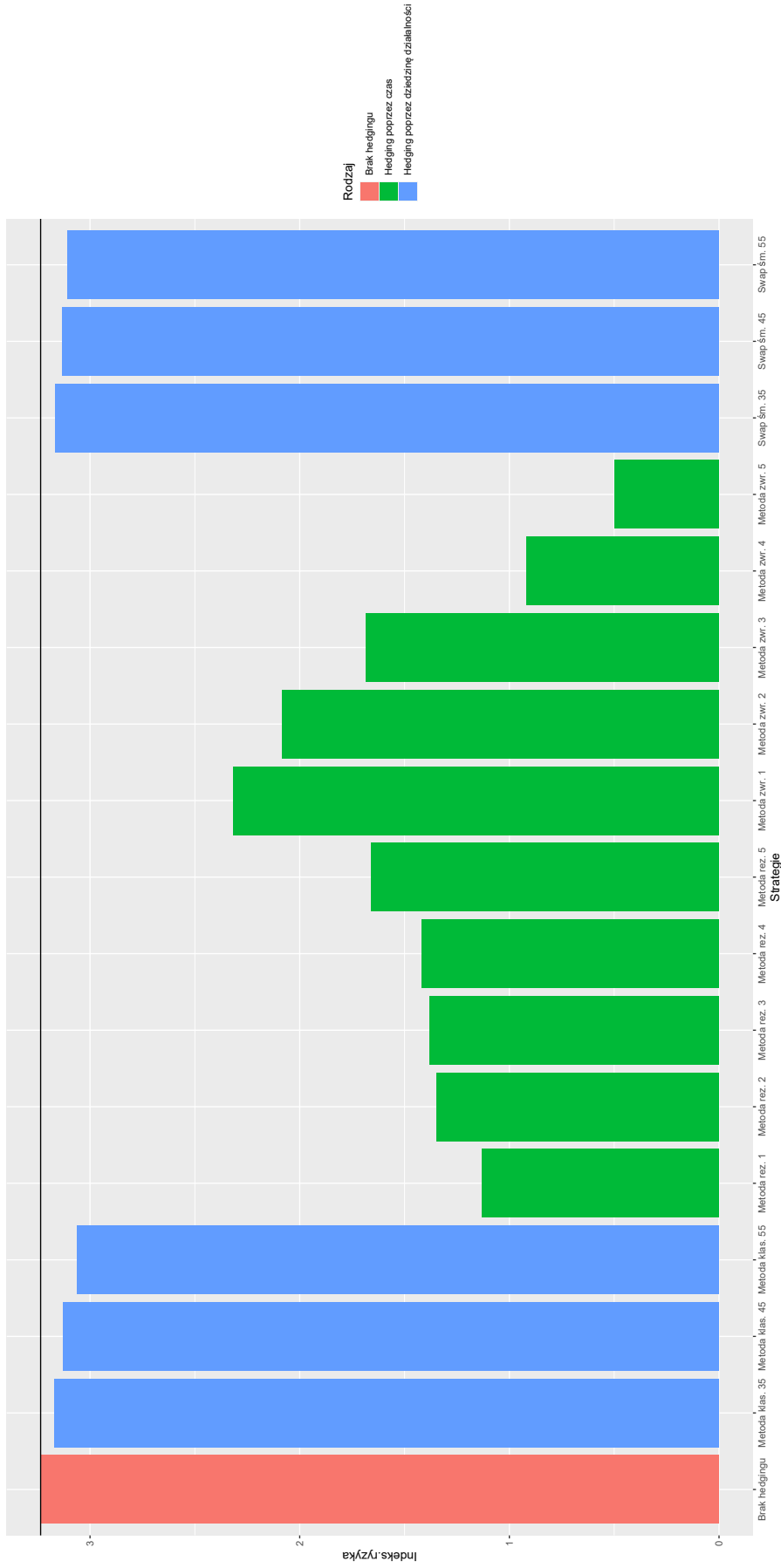
Ostatnią rzeczą, którą należy przeanalizować, jest opłacalność poszczególnych strategii. Z Rysunku 20 widać, że wprowadzenie każdego wariantu hedgingu kalkuluje się, chociaż w różnym stopniu. Metoda klasyczna i swap śmiertelności są mniej opłacalne od strategii hedgingu poprzez czas. Dla metody rezerwy oraz metody zwrotu możemy zauważyć, że użyteczność rośnie wraz ze średnią wypłatą z portfela, a przez to z kosztem netto benefitów na wypadek śmierci, ponieważ zapewniona redukcja ryzyka zawiązką rekompensuje zniechęcenie klientów do oferty w wyniku podwyższenia cen.



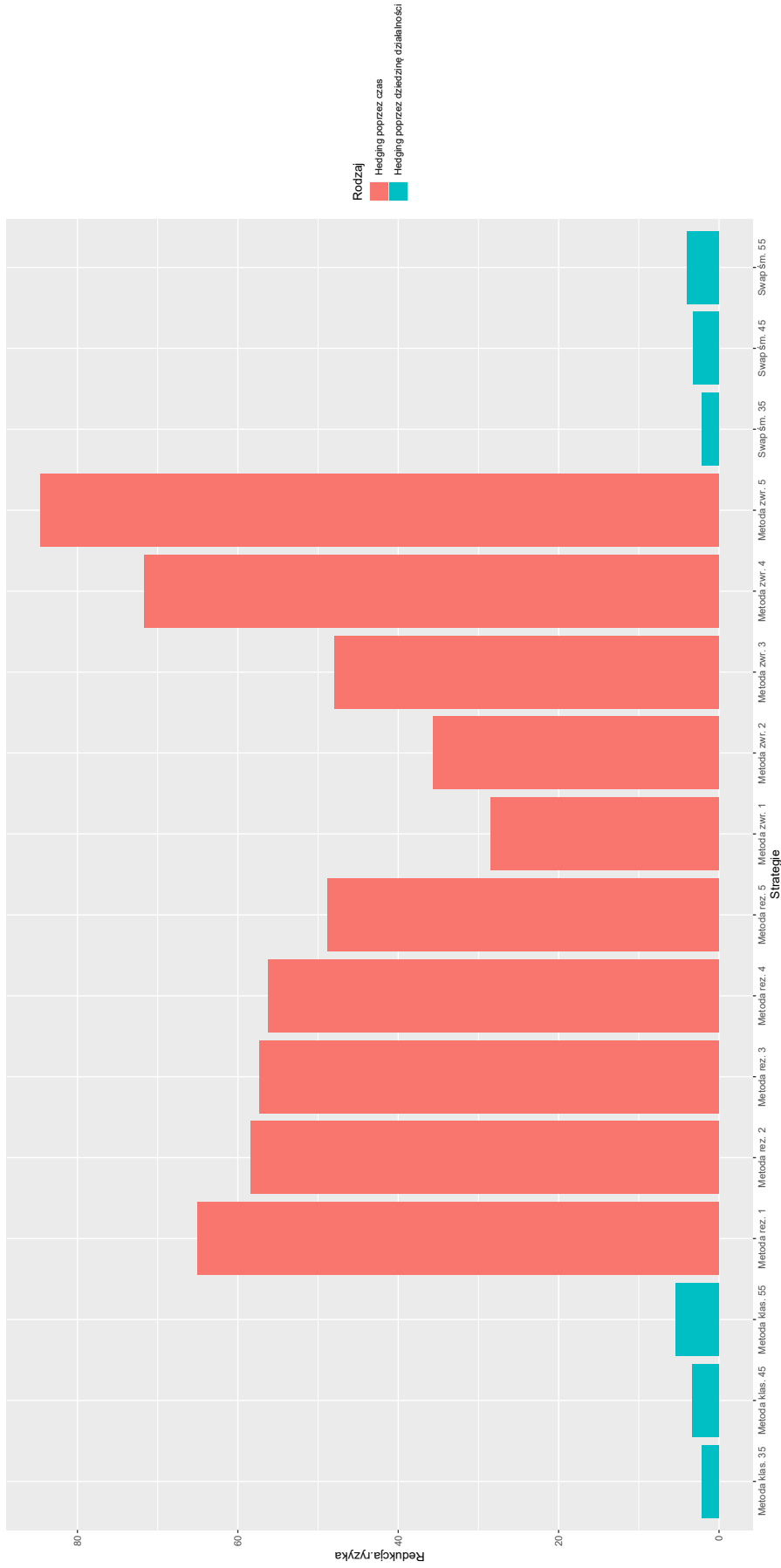
Rysunek 16: Syntetyczne ujęcie średnich wypłat z portfela dla poszczególnych strategii
Źródło: Opracowanie własne



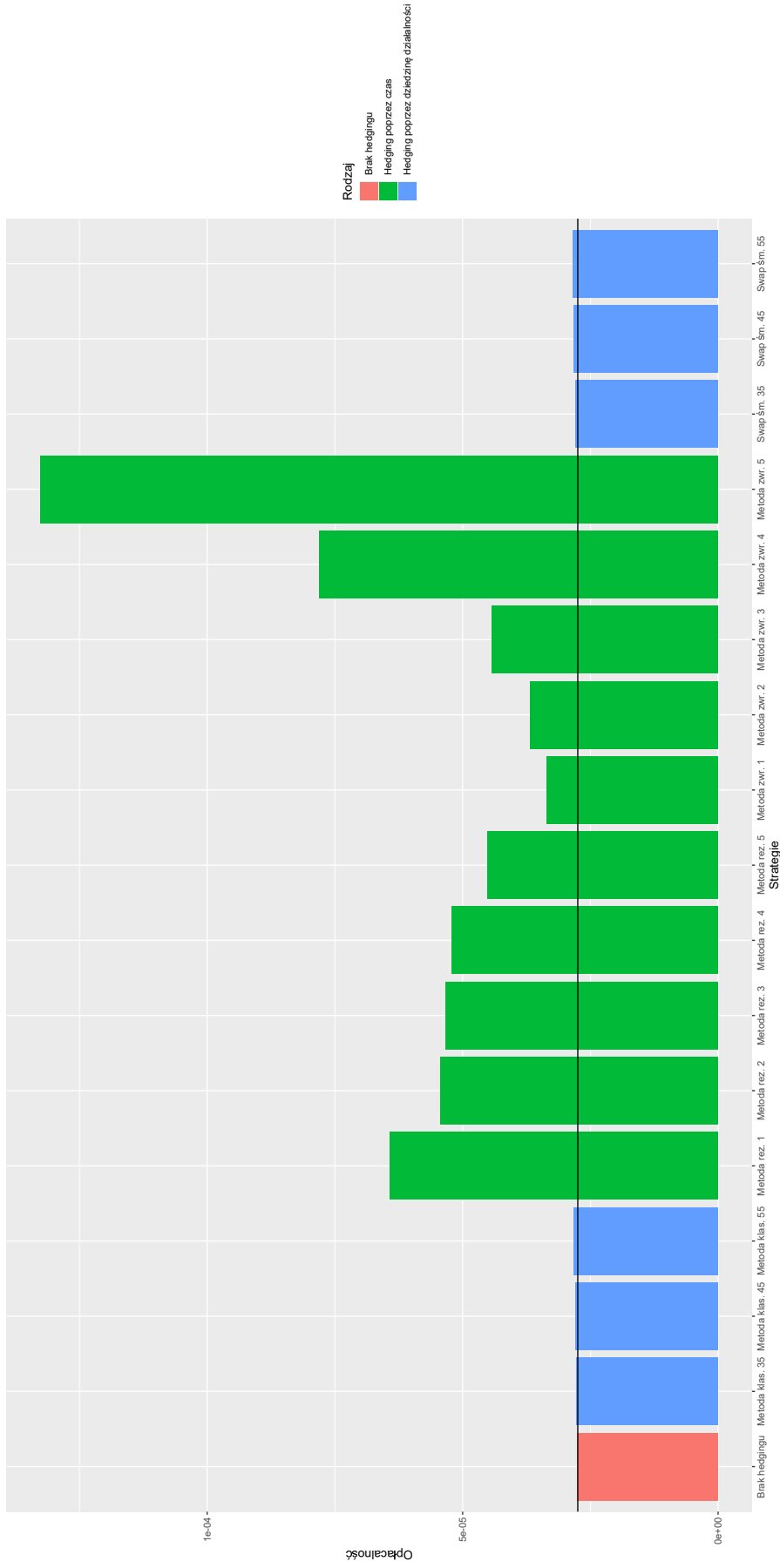
Rysunek 17: Syntetyczne ujęcie wariacji wypłat z portfela dla poszczególnych strategii
Źródło: Opracowanie własne



Rysunek 18: Syntetyczne ujęcie indeksu ryzyka dla poszczególnych strategii
Źródło: Opracowanie własne



Rysunek 19: Syntetyczne ujęcie redukcji ryzyka dla poszczególnych strategii
Źródło: Opracowanie własne



Rysunek 20: Syntetyczne ujęcie opłacalności dla poszczególnych strategii
Źródło: Opracowanie własne

Podsumujmy teraz przeprowadzone analizy. W rozważanych przypadkach nie zaistniała sytuacja, w której wprowadzenie strategii hedgingowej by się nie opłacało. Metody hedgingu poprzez czas dają lepsze efekty od metod hedgingu poprzez dziedzinę działalności. W pierwszej grupie strategii wypłaty rent i ubezpieczeń są od siebie zależne, podczas gdy w drugiej tak nie jest. Oznacza to, że z metody klasycznej mogą głównie korzystać ubezpieczyciele z dużą liczbą klientów oraz produktów, co pozwoli na znalezienie i połączenie ze sobą odpowiednich portfeli. Zakup swapa śmiertelności jest bardziej uniwersalną metodą, na którą mogą sobie pozwolić różne zakłady ubezpieczeniowe. Należy jednak pamiętać, że taka strategia powoduje ekspozycję na ryzyko niewypłacalności kontrahenta, które materializuje się, gdy druga strona umowy nie jest w stanie spłacać swoich zobowiązań. To ryzyko można zredukować do akceptowalnego poziomu, wyznaczając dwustronne Credit Value Adjustment kontraktu w sposób podobny do swapów stopy procentowej czy forwardu na walutę [9].

W niniejszej pracy opisano metody redukcji współczynnika zmienności wypłat z portfela rent życiowych z wykorzystaniem ubezpieczeń na życie, co utożsamiono z hedgingiem naturalnym. Wykonano również eksperyment numeryczny, który pokazał ich działanie w praktyce. Obie kwestie stanowią punkt wyjścia do dalszych rozważań. Przykładowo, można przeanalizować zachowanie się opisanych strategii hedgingowych w czasie, co w pewnym stopniu zostało wykonane w [11], jednak dotyczyło to pojedynczych wersji metody rezerwy oraz zwrotu i pomijało hedging poprzez dziedzinę działalności. Ciekawym potencjalnym kierunkiem działania jest również wykorzystanie innych niż model Lee-Cartera dynamicznych modeli ewolucji śmiertelności jako baz pod konstrukcję modelu technicznego. Ostatnie z proponowanych dalszych możliwych rozważań, ale nie wyczerpujące wszystkich możliwości, stanowi porównanie metod hedgingu naturalnego z metodami transferu ryzyka takimi jak reasekuracja czy derywaty natężenia śmiertelności różne od opisanego w tej pracy swapa.

Appendix

W niniejszym Appendixie omówione zostaną własności warunkowej wartości oczekiwanej oraz warunkowej wariancji wykorzystywane w Rozdziale 3. Wszystkie definicje i twierdzenia pochodzą z książki J. Jakubowskiego i R. Sztencła [7].

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną oraz niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ -ciałem.

Definicja A1. [7] Niech X będzie całkowalną zmienną losową. Warunkową wartością oczekiwaną X pod warunkiem \mathcal{G} nazywa się zmienną losową $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ spełniającą warunki

- $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ jest \mathcal{G} -mierzalna;
- dla każdego zdarzenia losowego $G \in \mathcal{G}$ z prawdopodobieństwem 1 zachodzi równość

$$\int_G X d\mathbb{P} = \int_G \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P}.$$

Twierdzenie A2. [7] Niech X będzie całkowalną zmienną losową. Wtedy:

- (i) jeśli X jest \mathcal{G} -mierzalna, to z prawdopodobieństwem 1 zachodzi $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$;
- (ii) jeśli $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}$, to z prawdopodobieństwem 1 zachodzą równości

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]|\mathcal{G}_2];$$

- (iii) z prawdopodobieństwem 1 zachodzi $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]]$.

Dowód. (i) Fakt, że obie zmienne X oraz $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ są \mathcal{G} -mierzalne oraz że dla każdego zdarzenia losowego $G \in \mathcal{G}$ zachodzi równość

$$\int_G \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P}$$

implikuje, iż X musi pokrywać się z $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ na zbiorach pełnej miary.

(ii) Zmienna $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]$ jest \mathcal{G}_1 -mierzalna oraz dla każdego zdarzenia losowego $G \in \mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ zachodzą równości

$$\int_G \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2] d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P} = \int_G \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1] d\mathbb{P}.$$

Oznacza to, że $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]$ na zbiorach pełnej miary. Z definicji warunkowej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]$ jest \mathcal{G}_2 -mierzalne, przez co na mocy (i) z prawdopodobieństwem 1 zachodzi też równość $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]|\mathcal{G}_2] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]$.

(iii) Jeżeli $\mathcal{G}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ oraz $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}$, to na mocy (ii) z prawdopodobieństwem 1 zachodzą równości

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]].$$

□

Definicja A3. [7] Niech X będzie zmienną losową całkowalną z kwadratem. Warunkową wariancją X pod warunkiem \mathcal{G} nazywa się zmienną losową

$$\text{Var}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}].$$

Twierdzenie A4. [7]

Niech X będzie zmienną losową całkowalną z kwadratem. Jej wariancję można zapisać jako

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[\text{Var}[X|\mathcal{G}]] + \text{Var}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]].$$

Dowód. Z własności wariancji zachodzi równość

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2. \quad (\text{A.1})$$

Na mocy podpunktu (iii) Twierdzenia A2 prawą stronę (A.1) można wyrazić jako

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}]] - (\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]])^2,$$

co, korzystając z definicji wariancji warunkowej, jest równoważne wyrażeniu

$$\mathbb{E}[\text{Var}[X|\mathcal{G}] + (\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2] - (\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]])^2. \quad (\text{A.2})$$

Porządkując (A.2) otrzymuje się

$$\mathbb{E}[\text{Var}[X|\mathcal{G}]] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2] - (\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]])^2,$$

które z podstawowych własności wariancji oraz faktu, że warunkowa wartość oczekiwana jest zmienną losową, daje równość

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[\text{Var}[X|\mathcal{G}]] + \text{Var}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]],$$

co kończy dowód. □

Spis rysunków

1	Wartości estymatora wielkości α_x dla poszczególnych lat życia	15
2	Wartości estymatora wielkości β_x dla poszczególnych lat życia	16
3	Wartości estymatora wielkości κ_y dla poszczególnych lat kalendarzowych . . .	16
4	Porównanie rzeczywistych i dopasowanych wartości natężenia śmiertelności dla 65-latków	17
5	Schemat działania swapu śmiertelności	27
6	Tysiąc pierwszych wysymulowanych trajektorii procesu κ_y	31
7	Prognozowane natężenia śmiertelności dla 35-latków według technicznych scenariuszy w 2020 roku	32
8	Prognozowane natężenia śmiertelności dla 45-latków według technicznych scenariuszy w 2020 roku	32
9	Prognozowane natężenia śmiertelności lat dla 55-latków według technicznych scenariuszy w 2020 roku	33
10	Prognozowane natężenia śmiertelności lat dla 65-latków według technicznych scenariuszy w 2020 roku	33
11	Prognozowane prawdopodobieństwo przeżycia przez 35-latków k lat w 2020 roku według technicznych scenariuszy	35
12	Prognozowane prawdopodobieństwo przeżycia przez 45-latków k lat w 2020 roku według technicznych scenariuszy	35
13	Prognozowane prawdopodobieństwo przeżycia przez 55-latków k lat w 2020 roku według technicznych scenariuszy	36
14	Prognozowane prawdopodobieństwo przeżycia przez 65-latków k lat w 2020 roku według technicznych scenariuszy	36
15	Schemat blokowy algorytmu ITM-d	37
16	Syntetyczne ujęcie średnich wypłat z portfela dla poszczególnych strategii	42
17	Syntetyczne ujęcie wariancji wypłat z portfela dla poszczególnych strategii	43
18	Syntetyczne ujęcie indeksu ryzyka dla poszczególnych strategii	44
19	Syntetyczne ujęcie redukcji ryzyka dla poszczególnych strategii	45
20	Syntetyczne ujęcie opłacalności dla poszczególnych strategii	46

Spis tabel

1	Empiryczne wyniki dla pojedynczych scenariuszy w sytuacji bez hedgingu . . .	34
2	Empiryczne wyniki w sytuacji bez hedgingu dla rozkładu bezwarunkowego . . .	38
3	Empiryczne wyniki dla metody rezerwy	38
4	Empiryczne wyniki dla metody zwrotu	39
5	Empiryczne wyniki dla metody klasycznej	40
6	Empiryczne wyniki dla swapu śmiertelności	40

Bibliografia

- [1] Bartkowiak, M. (2019) *Modelowanie śmiertelności i transfer ryzyka długowieczności*, Poznań, Polska: Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu.
- [2] Biffis, E. & Millosovich, P. (2006) 'The fair value of guaranteed annuity options', *Scandinavian Actuarial Journal*, 2006(1), pp. 23-41.
- [3] Błaszczyszyn, B. & Rolski, T. (2018) *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, Warszawa, Polska: Wydawnictwo Naukowe PWN SA.
- [4] Cobb C. & Douglas, P. (1928) 'A Theory of Production', *American Economic Review*, 18, pp. 139-165. JSTOR [Dostęp: 14.07.2021]. Dostępny w: www.jstor.org/stable/1811556.
- [5] Cox, S. & Lin, Y. (2007) 'Natural hedging of life and annuity mortality risks', *North American Actuarial Journal*, 11(3), pp. 1-15.
- [6] Hogg, R., McKean, J. & Craig, A. (2005) *Introduction to Mathematical Statistics*, Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.
- [7] Jakubowski, J. & Sztencel, R. (2001) *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Warszawa, Polska: SCRIPT.
- [8] Lee, R. & Carter, L. (1992) 'Modeling and Forecasting U.S. Mortality', *Journal of the American Statistical Association*, 87(419), pp. 659-671.
- [9] Lichters, R., Stamm, R. & Gallagher, D. (2005) *Modern Derivatives Pricing and Credit Exposure Analysis*, Basingstoke, Hampshire: Palgrave Macmillan.
- [10] Lundquist, J., Anderton, D. & Yaukey D. (2015) *Demography: The Study of Human Population*. 4th edn. Long Grove, Illinois: Waveland Press Inc.
- [11] Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S. & Olivieri, A. (2009) *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*, New York, NY: Oxford University Press.
- [12] Podgórska, M. & Klimkowska, J. (2005) *Matematyka finansowa*, Warszawa, Polska: Wydawnictwo Naukowe PWN SA.
- [13] Rolski, T. (2018) *Symulacje stochastyczne i teoria Monte Carlo*, Wrocław, Polska: Uniwersytet Wrocławski.
- [14] Samuelson, P. & Nordhaus, W. (2014) *Ekonomia*. Przeł. A. Bukowski & J. Środa. Poznań, Polska: Dom Wydawniczy REBIS Sp. z o.o.
- [15] University of California & Berkeley, Max Planck Institute for Demographic Research, (2000) *Human Mortality Database* [Dostęp: 05.08.2021]. Dostępny w: <https://www.mortality.org>.
- [16] Wang, S. (2002) 'A universal framework for pricing financial and insurance risks', *ASTIN Bulletin*. Cambridge University Press, 32(2), pp. 213-234.

- [17] Wilmott, P. (2006) *Paul Wilmott On Quantitative Finance*, Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
- [18] Wiśniewska, M. (2020) *Model Lee-Cartera*. Praca magisterska. Uniwersytet Wrocławski.