

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: matematyka stosowana

Łukasz Stępień

Układ Debye'a w opisie zjawiska półprzewodnictwa

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Piotra Bilera

Wrocław, 2021

Spis treści

| | |
|--|-----------|
| 1 Preliminaria | 3 |
| 1.1 Podstawowe definicje fizyczne | 3 |
| 2 Opis fizyczny zjawiska półprzewodnictwa | 4 |
| 3 Opis matematyczny zjawiska półprzewodnictwa | 4 |
| 3.1 Przedstawienie modelu zaproponowanego przez Nernsta, Plancka i Debye'a . . . | 4 |
| 3.2 Funkcjonały entropii | 6 |
| 3.3 Asymptotyczne własności rozwiązań | 7 |
| 4 Dowody twierdzeń | 8 |
| 4.1 Dowód Twierdzenia 1 | 8 |
| 4.2 Dowód Twierdzenia 2 | 11 |
| 4.3 Dowód istnienia i jednoznaczności wyznaczenia stanu stacjonarnego $\langle U, V, \Phi \rangle$. . | 13 |
| 5 Przypadek dwuwymiarowy | 14 |
| 5.1 Rozwiązania samopodobne w przypadku dwuwymiarowym | 14 |
| 6 Podsumowanie | 17 |

Spis rysunków

| | |
|--|----|
| 1 Ograniczone rozwiązania | 15 |
| 2 Nieograniczone rozwiązania | 16 |
| 3 Obszar spełniania warunków brzegowych dla układu (3.1) | 16 |

1 Preliminaria

Gdy wraz z nadejściem XIX wieku nauka zaczynała poznawać prąd elektryczny, a fizycy zaczęli starać się w miarę dokładnie zbadać nową dziedzinę, substancje, z którymi dotychczas mieli do czynienia, nabrały całkiem nowych właściwości. Starano się więc zrozumieć ich naturę wobec nowego obiektu badań, jakim był prąd. Nie inaczej było w przypadku *półprzewodników* - substancji o przewodności, którą można modyfikować przez zmianę odpowiednich czynników zewnętrznych.

Zrozumienie dokładnych mechanizmów stojących za pojęciem prądu oraz okiełznanie nowej siły stała się podstawowym celem fizyki XIX oraz XX wieku. Dzięki temu zyskaliśmy kolejne przydatne narzędzia ułatwiające nasze codzienne życie. Ważnym punktem w procesie poznawania własności prądu było dokładne opisanie zjawisk wewnątrz struktury półprzewodników.

Stąd też starano się symultanicznie, wraz z badaniem nowego zjawiska oraz praw rządzącym, dopasować odpowiednie modele, którymi można się posłużyć by w pełni poznać urządzenia korzystające ze zjawiska półprzewodnictwa.

1.1 Podstawowe definicje fizyczne

Definicja 1. *Donorem* nazywamy cząstkę o innej liczbie elektronów walencyjnych od liczby elektronów w cząstkach sieci krystalicznej, oddająca elektron/elektrony do otoczenia. Oznaczamy go literą *n*.

Definicja 2. *Akceptorem* nazywamy cząstkę o innej liczbie elektronów walencyjnych od liczby elektronów w cząstkach sieci krystalicznej, pobierająca elektron/elektrony z otoczenia. W wyniku absorbowania elektronu z otoczenia, powstają *dziury elektronowe*, czyli miejsca naładowane dodatnio. Oznaczamy go literą *p*.

Definicja 3. *Pasmem energetycznym* nazywamy ograniczony, ciągły zakres energii.

Definicja 4. *Pasmem walencyjnym* nazywamy dozwolone pasmo energetyczne, w którym dla temperatury $T = 0$ K obsadzone są wszystkie stany elektronowe.

Definicja 5. *Pasmem przewodnictwa* nazywamy dozwolone pasmo energetyczne o energii wyższej niż dla pasma walencyjnego.

Definicja 6. *Domieszkowaniem n* nazywamy domieszkowanie donorami; następuje wtedy dominacja ładunków naładowanych ujemnie, czyli dominacja przewodnictwa elektronowego. Półprzewodniki zmodyfikowane tym rodzajem domieszkowania nazywamy *półprzewodnikami typu n*.

Definicja 7. *Domieszkowaniem p* nazywamy domieszkowanie akceptorami; następuje wtedy dominacja ładunków naładowanych dodatnio, czyli dominacja przewodnictwa dziurowego. Półprzewodniki zmodyfikowane tym rodzajem domieszkowania nazywamy *półprzewodnikami typu p*.

Definicja 8. *Tranzystorem* nazywamy element półprzewodnikowy, który ma przynajmniej dwa złącza p-n.

Definicja 9. *Technologią MOS* nazywamy technologię wykorzystywaną w produkcji półprzewodników, w której bramka oddzielająca złącza p-n jest cienką, ale najwyższej jakości warstwą izolującą, najczęściej wykonaną z dwutlenku krzemu (SiO_2).

2 Opis fizyczny zjawiska półprzewodnictwa

Jako *półprzewodniki* określamy substancje, których własności przewodnictwa elektrycznego można w pełni uzależnić od czynników zewnętrznych, przechodząc od właściwości izolatorów do właściwości przewodników. Takimi substancjami są między innymi german (Ge), krzem (Si) czy też arsenek galu (GaAs).

Co prawda półprzewodników jest mnóstwo, to jednak te trzy substancje są najbardziej rozpowszechnione oraz zbadane. Poznanie ich właściwości pozwala na - pewnym stopniu - zrozumienie zjawisk w pozostałych półprzewodnikach. Dzięki możliwości kontrolowania własności elektrostatycznych danego półprzewodnika poprzez odpowiednie i systematyczne modyfikacje z zewnątrz, potrafimy stworzyć w głównej mierze tranzystory, wykorzystywane chociażby w strukturach VLSI¹, czyli w strukturach składających się z milionów tranzystorów MOSFET² w jeden układ scalony.

Ich właściwości można wytłumaczyć na podstawie sieci krystalicznej tych substancji. Ich sieć krystaliczna jest podobna do tej zauważonej w diamencie – jest to regularna sieć, w której atomy wiążą się z najbliższymi sąsiadami leżącymi na wierzchołkach czworościanu. Dzięki temu im niższa temperatura, tj. bliska zera absolutnego (-273,15 °C lub 0 Kelvina³), tym bliżej im do izolatorów, Natomiast w temperaturze pokojowej można zauważyć w pewnym stopniu ich właściwości podobnych do tych, jakie ma przewodnik.

Kolejnym sposobem nad kontrolowaniem właściwości elektrycznych półprzewodników jest wprowadzanie kolejnych atomów, które w sieci krystalicznej jonizują się i albo przekazują elektron do pasma przewodnictwa, albo absorbują elektron z pasma walencyjnego. W pierwszym przypadku w sieci krystalicznej powstaje dodatkowy ładunek ujemny, zaś w drugim – powstaje dodatkowy ładunek dodatni, zwany *dziurą elektronową*. Zjawisko to nazywamy *domieszkowaniem półprzewodnika*. Aby opisać proces domieszkowania, skorzystamy z równań reakcji - dyfuzji.

3 Opis matematyczny zjawiska półprzewodnictwa

3.1 Przedstawienie modelu zaproponowanego przez Nernsta, Plancka i Debye'a

Przyjmijmy, że $u = u(x, t)$ opisuje gęstość ładunku ujemnego, zaś $v = v(x, t)$ - gęstość ładunku dodatniego, określone na pewnym obszarze $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, gdzie d jest wymiarem naszej przestrzeni, $d \geq 2$. Ponadto niech φ oznacza potencjał elektryczny danego środowiska. Najprostszy model, który opisuje sposób zachowania się cząstek w danym środowisku, jest dany następującym układem równań:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla \varphi) = \nabla \cdot (\nabla u + u \nabla \varphi) \\ v_t = \Delta v - \nabla \cdot (v \nabla \varphi) = \nabla \cdot (\nabla v - v \nabla \varphi) \\ \varphi = v - u \end{cases} \quad (3.1)$$

¹Very Large Scale Integration - integracja na bardzo dużą skalę

²Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effect Transistor - tranzystor wykonany w technologii MOS

³ -273.15°C = 0 K

Układ ten został sformułowany przez W. Nernsta oraz M. Plancka dla dowolnych nośników ładunków elektrycznych pod koniec XIX wieku, a dokładniej zbadany w przypadku elektrolitów przez P. Debye'a oraz E. Hückela w latach dwudziestych XX wieku.

Oprócz powyższego układu, ważne są warunki początkowe oraz brzegowe, opisujące dokładnie środowisko, w którym rozważamy nasze cząstki i badamy ich własności elektrostatyczne.

Warunki początkowe są opisane funkcją zależną od położenia cząstki o określonym ładunku w przestrzeni i interpretujemy je jako stan początkowy ładunków w danym obszarze, tj. w chwili $t = 0$. W naszym przypadku warunki początkowe zadamy następująco:

$$u_0(x) = u(x, t), \text{ gdzie } x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d - \text{gęstość ładunku ujemnego w chwili początkowej } t = 0, \quad (3.2)$$

$$v_0(x) = v(x, t), \text{ gdzie } x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d - \text{gęstość ładunku dodatniego w chwili początkowej } t = 0. \quad (3.3)$$

W zależności od warunków brzegowych możemy rozważać różne sytuacje, przykładowo:

- **Przez brzeg nie ma przepływu**

Rozważamy taki warunek brzegowy w przypadku, gdy Ω jest ograniczoną podprzestrzenią \mathbb{R}^d , $d \geq 3$. Warunek ten przedstawiany jest następującymi równaniami:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \nu} + u \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

- **Brzeg jest przewodnikiem prądu**

Ponieważ w takiej sytuacji przestrzeń wraz z brzegiem bierze udział w przepływie ładunków, powodując przepływ prądu, więc potencjału na brzegu nie rozważamy:

$$\varphi = 0 \text{ dla } x \in \partial\Omega. \quad (3.5)$$

- **Brzeg jest dielektrykiem**

Definicja 10. *Dielektrykiem* nazywamy substancję, która nie przewodzi co prawda prądu, jednak przechowuje ładunki, przez co jest możliwa polaryzacja dielektryków, podczas gdy izolatory zapewniają odporność przed przepływem prądu elektrycznego.

Przypomnijmy rozwiązanie fundamentalne równania Laplace'a $\Delta u = 0$, gdzie $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ (d - wymiar przestrzeni). Jest ono dane wzorem:

$$E_d(x) = \begin{cases} -\frac{\log|x|}{2\pi} & \text{dla } d = 2 \\ \frac{|x|^{2-d}}{d(d-2)\omega_d} & \text{dla } d \geq 3 \end{cases} ,$$

gdzie ω_d jest objętością kuli jednostkowej w \mathbb{R}^d .

Wtedy potencjał wyrażamy wzorem:

$$\varphi = E_d * (v - u), \quad (3.6)$$

gdzie * oznacza *splot funkcji*.

Standardowo rozpatrujemy układ (3.1) z dwoma warunkami brzegowymi - (3.4) oraz (3.5) albo (3.6).

Zdefiniujmy też *całkowity ładunek* dodatni i ujemny w danym obszarze:

$$M_u = \int_{\Omega} u_0(x) dx = \int_{\Omega} u(x, t) dx - \text{całkowity ładunek ujemny}, \quad (3.7)$$

$$M_v = \int_{\Omega} v_0(x) dx = \int_{\Omega} v(x, t) dx - \text{całkowity ładunek dodatni}. \quad (3.8)$$

Uwaga! Nie zawsze musi zachodzić *warunek równowagi elektrycznej*, tj. $M_u = M_v$. Natomiast jest on wymagany przy jednorodnym warunku brzegowym Neumanna, czyli gdy przez brzeg nie ma przepływu, czyli (w naszym przypadku) potencjał na brzegu wynosi 0.

Oczywiście powyższe równania w pewien sposób ułatwiają spojrzenie na to, co dzieje się wewnątrz półprzewodników - rzeczywistość okazuje się być bardziej skomplikowana niż nam się wydaje. W naszym przypadku jednak taki model nam wystarczy.

3.2 Funkcjonały entropii

Definicja 11. *Entropia* jest miarą nieuporządkowania układu. Jest ona funkcją stanu, czyli zależy jedynie od energii (tu nazywanej jako **stan**) na początku i na końcu ewolucji danego układu.

W zależności od tego gdzie rozpatrujemy dany układ, definiujemy różne funkcjonały opisujące entropię:

- **Standardowa definicja**

$$L(t) = \int_{\Omega} u(x, t) \log \left(\frac{u(x, t)}{u_{as}(x, t)} \right) dx + \int_{\Omega} v(x, t) \log \left(\frac{v(x, t)}{v_{as}(x, t)} \right) dx + \frac{1}{2} |\nabla \varphi(t)|_2^2 \quad (3.9)$$

- **W przypadku ograniczonej dziedziny**

$$\begin{aligned} W(t) = & \int_{\Omega} u(x, t) \log(u(x, t)) dx - \int_{\Omega} U(x) \log(U(x)) \\ & + \int_{\Omega} v(x, t) \log(v(x, t)) dx - \int_{\Omega} V(x) \log(V(x)) \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - v) \varphi dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (U - V) \Phi dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Użyte w powyższych wzorach u_{as} i v_{as} nazywamy **stanami asymptotycznymi**, o których będzie mowa niebawem, natomiast trójka $\langle U, V, \Phi \rangle$ jest **jedynym stanem stacjonarnym** układu (3.1) - dowód tego faktu zamieścimy poniżej.

3.3 Asymptotyczne własności rozwiązań

Zauważono, że rozwiązanie układu (3.1) przy warunku (3.6), jeśli $M_u = M_v = 1$ oraz u_0, v_0 są regularnymi funkcjami, a wymiar naszej przestrzeni $\Omega = \mathbb{R}^d$ jest większy bądź równy 3, to rozwiązania zbliżają się - przy czasie dążącym do nieskończoności - do stanów asymptotycznych, zadanych następującymi wzorami:

$$u_{as}(x, t) = \frac{M_u}{\sqrt{[2\pi(2t+1)]^d}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2(2t+1)}\right), \quad (3.11)$$

$$v_{as}(x, t) = \frac{M_v}{\sqrt{[2\pi(2t+1)]^d}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2(2t+1)}\right). \quad (3.12)$$

Można sprawdzić prostym rachunkiem, że powyższe funkcje spełniają równanie ciepła.

Oczywiście chcemy pokazać, że dobierając słabsze warunki początkowo - brzegowe, otrzymamy podobne zachowanie się cząstek naładowanych. Aby to pokazać, pokażemy wykładniczą zbieżność do stanów stacjonarnych ze stałą rozkładu zależną od wymiaru przestrzeni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$.

Twierdzenie 1. *Istnieje stała $C = C(d, M_u, M_v, L_0)$ zależna od wymiaru przestrzeni $\Omega = \mathbb{R}^d$, stanów stacjonarnych M_u, M_v oraz wartości funkcjonau entropii w chwili $t = 0$, oznaczenie $L_0 = L(0)$, dla zagadnienia (3.1) z zagadnieniami początkowym (3.2) i (3.3) oraz brzegowym (3.7). Ponadto dla każdej chwili $t > 0$ zachodzą następujące nierówności:*

$$L(t) \leq C \cdot H(t) \quad (3.13)$$

$$|u(t) - u_{as}(t)|_1^2 + |v(t) - v_{as}(t)|_1^2 + |\nabla\varphi(t)|_2^2 \leq C \cdot H(t) \quad (3.14)$$

gdzie funkcję $H(t)$ definiujemy w następujący sposób:

$$H(t) = \begin{cases} (2t+1)^{-\frac{1}{2}}, & \text{gdy } d = 3 \\ (2t+1)^{-1} \cdot (\log(2t+1) + 1), & \text{gdy } d = 4 \\ (2t+1)^{-1}, & \text{gdy } d > 4 \end{cases} ; \quad (3.15)$$

jeśli zaś zachodzi warunek równowagi elektrycznej, to dla $d \geq 3$ funkcja H jest zdefiniowana po prostu następującym wzorem:

$$H(t) = (2t+1)^{-1}. \quad (3.16)$$

Twierdzenie 2. *Jeśli przestrzeń jednostajnie wypukła Ω jest przynajmniej dwuwymiarowa ($d \geq 2$), to istnieją dwie stałe $\lambda = \lambda(\Omega) > 0$ oraz $C = C(M_u, M_v, W_0)$ - W_0 rozumiemy w ten sam sposób, co L_0 , tj. $W_0 = W(0)$ - takie, że dla każdej trójki rozwiązań $\langle u, v, \varphi \rangle$ układu (3.1) z warunkami początkowymi (3.2) - (3.3) i warunkami brzegowymi (3.4) - (3.5) zachodzą następujące warunki:*

$$\begin{cases} \text{dla każdego } t \geq 0, W(t) \leq W(0)e^{-\lambda t} \\ |u(t) - U|_1^2 + |v(t) - V|_1^2 + |\nabla(\varphi - \Phi)|_2^2 \leq Ce^{-\lambda t} \end{cases} \quad (3.17)$$

4 Dowody twierdzeń

4.1 Dowód Twierdzenia 1

Zanim zaczniemy dowód, przeskalujemy odpowiednio układ równań (3.1) aby otrzymać *studnię potencjału* - rejon pola elektrostatycznego, w którym energia potencjalna przyjmuje swoje minimum - przez co otrzymamy oczekiwaną zbieżność wykładniczą do stanów stacjonarnych.

Niech

$$\begin{cases} \bar{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \bar{x} = \frac{x}{R(t)} \\ \tau = \log(R(t)), \text{ gdzie } \tau > 0 \\ R(t) = (2t + 1)^{\frac{1}{2}} = e^\tau \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} u(x, t) = \frac{1}{R^d(t)} \bar{u}(\bar{x}, \tau) \\ v(x, t) = \frac{1}{R^d(t)} \bar{v}(\bar{x}, \tau) \\ \varphi(x, t) = \bar{\varphi}(\bar{x}, \tau) \end{cases}$$

Wtedy otrzymujemy:

$$\begin{array}{l|l} \tau = \frac{1}{2} \log(2t + 1) & \bar{x} = \frac{x}{R(t)} \\ t = \frac{e^{2\tau} - 1}{2} & \nabla \bar{x} = \frac{\nabla x}{R(t)} \\ dt = e^{2\tau} d\tau & \nabla_{\bar{x}}(\cdot) = \frac{1}{R(t)} \nabla(\cdot) = e^{-\tau} \nabla(\cdot) \end{array}$$

Wtedy nasze funkcje gęstości ładunku przybierają następujące postaci:

$$\begin{array}{l|l} u(x, t) = u(R(t)\bar{x}, \frac{e^{2\tau}-1}{2}) & v(x, t) = v(R(t)\bar{x}, \frac{e^{2\tau}-1}{2}) \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} = (\nabla u \cdot \bar{x})(2t + 1)^{-0.5} + e^{2\tau} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial \tau} = (\nabla v \cdot \bar{x})(2t + 1)^{-0.5} + e^{2\tau} \frac{\partial v}{\partial t} \end{array},$$

a funkcja opisująca potencjał elektryczny pozostaje niezmiennicza na zamianę zmiennych, tj.

$$\varphi(x, t) = \bar{\varphi}(\bar{x}, \tau).$$

Z poprzednich rachunków otrzymujemy, że pochodne względem czasu t mają następującą postać:

$$u_t = \frac{u_\tau - (\nabla u \cdot x) \frac{1}{R(t)}}{e^{2\tau}},$$

$$v_t = \frac{v_\tau - (\nabla v \cdot x) \frac{1}{R(t)}}{e^{2\tau}}.$$

Podstawiając do dwóch pierwszych równań układu (3.1), otrzymujemy następujące równości:

$$\begin{array}{l|l} u_t = \frac{u_\tau - (\nabla u \cdot x) \frac{1}{R(t)}}{e^{2\tau}} = \Delta u + \nabla(u \nabla \varphi) & v_t = \frac{v_\tau - (\nabla v \cdot x) \frac{1}{R(t)}}{e^{2\tau}} = \Delta v - \nabla(v \nabla \varphi) \\ u_\tau = \nabla_{\bar{x}} u \cdot x \frac{1}{R(t)} + e^{2\tau} \nabla_x \cdot (\nabla_x u + u \nabla_x \varphi) & v_\tau = \nabla_{\bar{x}} v \cdot x \frac{1}{R(t)} + e^{2\tau} \nabla_x \cdot (\nabla_x v - v \nabla_x \varphi) \\ u_\tau = \frac{1}{R(t)} \nabla_{\bar{x}} \cdot (\nabla_{\bar{x}} u + u x + u \nabla_{\bar{x}} \varphi) & v_\tau = \frac{1}{R(t)} \nabla_{\bar{x}} \cdot (\nabla_{\bar{x}} v + v x - v \nabla_{\bar{x}} \varphi) \end{array}$$

Uwaga! Tam, gdzie nie będzie to powodować nieporozumień, pomijamy linię nad zmiennymi i symbolami funkcji.

Wobec powyższych otrzymujemy następujący, przeskalowany, układ:

$$\begin{cases} u_\tau = \nabla \cdot (\nabla u + ux + u\nabla\varphi), \\ v_\tau = \nabla \cdot (\nabla v + vx - v\nabla\varphi), \\ \Delta\varphi = e^{-\tau(d-2)}(v - u). \end{cases} \quad (4.1)$$

Powyższe skalowanie zachowuje normę w przestrzeni L^1 , wobec czego całkowity ładunek dodatni i ujemny nie zmieniają się, tj.:

$$\begin{cases} M_u = \int_{\Omega} u_0(x, t) dx = \int_{\Omega} \bar{u}(\bar{x}, \tau) d\bar{x}, \\ M_v = \int_{\Omega} v_0(x, t) dx = \int_{\Omega} \bar{v}(\bar{x}, \tau) d\bar{x}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Również punkt stacjonarny przeskalowanego układu zmienia swoją postać na następującą:

$$\begin{cases} u_\infty = \frac{M_u}{\sqrt{(2\pi)^d}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right), \\ v_\infty = \frac{M_v}{\sqrt{(2\pi)^d}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right). \end{cases} \quad (4.3)$$

Stany te odpowiadają pierwotnym stanom asymptotycznym (u_{as}, v_{as}) .

Niech $\varphi = \beta\psi$, gdzie $\beta = \beta(\tau) = e^{-\tau(d-2)}$; zauważmy, że $\beta \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0$, jako że $d \geq 3$ w naszym przypadku. Wtedy określamy *funkcjonał relatywnej entropii*, będący odpowiednikiem funkcyjonału entropii (3.9) w nowych zmiennych:

$$W(\tau) = \int_{\Omega} u \log\left(\frac{u}{u_\infty}\right) dx + \int_{\Omega} v \log\left(\frac{v}{v_\infty}\right) dx + \frac{\beta}{2} |\nabla\psi|_2^2. \quad (4.4)$$

Ewolucję entropii (tj. zmiana entropii układu w czasie) zadajemy zatem wzorem

$$\frac{dW}{d\tau} = - \int_{\Omega} u |\nabla \log \frac{u}{U}|^2 dx - \int_{\Omega} v |\nabla \log \frac{v}{V}|^2 dx - \left(\frac{d}{2} - 1\right) \beta |\nabla\psi|_2^2, \quad (4.5)$$

gdzie U, V odnoszą się do *lokalnych rozkładów Maxwella* cząstek o gęstości odpowiednio u i v . Wyrażamy je następującymi wzorami:

$$U(x, \tau) = M_u \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}|x|^2 - \varphi(x, \tau)\right)}{\int_{\Omega} \exp\left(-\frac{1}{2}|y|^2 - \varphi(y, \tau)\right) dy}, \quad (4.6)$$

$$V(x, \tau) = M_v \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}|x|^2 + \varphi(x, \tau)\right)}{\int_{\Omega} \exp\left(-\frac{1}{2}|y|^2 + \varphi(y, \tau)\right) dy}; \quad (4.7)$$

wtedy $\nabla U/U = -(x + \nabla\varphi)$ oraz $\nabla V/V = -(x - \nabla\varphi)$. Ponadto, jeśli oznaczymy

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u \left| \frac{\nabla u}{u} + x \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} v \left| \frac{\nabla v}{v} + x \right|^2 dx, \quad (4.8)$$

to ewolucję entropii zapisujemy następująco:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\tau} &= -2J - 2 \int_{\Omega} (\nabla u - \nabla v) \cdot \nabla\varphi dx - 2 \int_{\Omega} (u - v)x \cdot \nabla\varphi dx - \int_{\Omega} (u + v) |\nabla\varphi|^2 dx - \left(\frac{d}{2} - 1\right) \beta |\nabla\psi|_2^2 = \\ &= -2J - \beta^2 \int_{\Omega} (u + v) |\nabla\psi|_2^2 dx - 2\beta |u - v|_2^2 + \left(\frac{d}{2} - 1\right) \beta |\nabla\psi|_2^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Wielkość J możemy oszacować z dołu za pomocą *nierówności logarytmicznej Sobolewa*, która stanowi, co następuje:

Dla dowolnej funkcji f z przestrzeni L^2 z miarą gaussowską na \mathbb{R}^d , czyli

$$\nu(A) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_A \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|_{\mathbb{R}^d}^2\right) d\lambda_d(x).$$

zachodzi nierówność:

$$\int f \log \frac{f}{|f|_1} dx + d\left(1 + \frac{1}{2} \log(2\pi a)\right) \leq \frac{a}{2} \int \frac{|\nabla f|^2}{f} dx; \quad (4.10)$$

nierówność ta zachodzi dla dowolnego $a > 0$, natomiast staje się ona równością, gdy funkcja f jest *gaussowska*, to jest zadana wzorem $f(x) = C \exp(-\frac{|x|^2}{2a})$, gdzie C to dowolna stała.

Przyjmując za $a = 1$ w powyższej nierówności, szacujemy (4.9) i otrzymujemy:

$$-\left(\frac{dW}{d\tau} + 2W\right) \geq 2\beta|u - v|_2^2 - \frac{\beta d}{2} |\nabla\psi|_2^2 \geq -C\beta(M_u + M_v)^2, \quad (4.11)$$

przy czym C jest stałą zależną od wymiaru przestrzeni Ω : $C = C(d) = \frac{2}{d} \left(\frac{d-2}{4}\right)^{\frac{d-2}{2}}$.

Wobec powyższych, otrzymujemy:

$$\frac{d}{d\tau} (e^{2\tau} W(\tau)) \leq C(M_u + M_v)^2 e^{\tau(4-d)} \quad (4.12)$$

Po scałkowaniu obydwu stron powyższej nierówności:

$$W(\tau) \leq \left(W(0)e^{-\tau} + C(M_u + M_v)^2\right) e^{-\tau}. \quad (4.13)$$

W przypadku gdy wymiar przestrzeni Ω wynosi 3 ($d = 3$), wzór (4.12) po scałkowaniu przybiera postać:

$$W(\tau) \leq \left(W(0) + C(M_u + M_v)^2 \tau\right) e^{-2\tau}, \quad (4.14)$$

natomiast dla $d \geq 4$ otrzymujemy:

$$W(\tau) \leq \left(W(0) + C(M_u + M_v)^2\right) e^{-2\tau}. \quad (4.15)$$

Ponieważ $W(\tau)$ kontroluje normę przestrzeni L^1 funkcji $u - u_\infty$ oraz $v - v_\infty$, więc podobne szacowania jak wyżej otrzymujemy dla wyżej wymienionych funkcji, tj.:

$$|u(\tau) - u_\infty|_1^2 + |v(\tau) - v_\infty|_1^2 + \beta |\nabla\psi(\tau)|_2^2 \leq 2\left(\max(M_u, M_v) + 1\right) W(\tau). \quad (4.16)$$

Powyższe szacowanie jest konsekwencją *nierówności wagowej Csiszára - Kullbacka - Pinskera*.

Jeśli wrócimy do pierwotnych zmiennych, to otrzymamy nierówności podane w pierwszej części pierwszego twierdzenia. Jest to koniec dowodu pierwszej części Twierdzenia 1.

Gdy spełniony jest warunek równowagi elektrycznej ($M_u = M_v$), czyli $u_\infty = v_\infty$, to dla $d = 3$ otrzymujemy $|u - v|_1^2 = |u - u_\infty - (v - v_\infty)|_1^2 \leq C e^{-\tau}$.

Modyfikując odpowiednio (4.11), otrzymujemy następującą postać wymienionego warunku:

$$\frac{d}{d\tau} \left(e^{2\tau} W(\tau) \right) \leq C e^{2\tau} \beta |u - v|_1^2 \leq C \quad (4.17)$$

co z kolei prowadzi, po scałkowaniu, do nierówności $W(\tau) \leq C(1 + \tau)e^{-2\tau}$. Po zastosowaniu nierówności wagowej Csiszára - Kullbacka - Pinsker'a do (4.17) otrzymamy nierówność $\frac{d}{d\tau} \left(e^{2\tau} W(\tau) \right) \leq C e^{-\tau}(1 + \tau)$, zatem $W(\tau) \leq C e^{-2\tau}$. Powracając do pierwotnych zmiennych, kończymy drugą część dowodu. QED

4.2 Dowód Twierdzenia 2

Najpierw wskażmy stan stabilności układu (3.1), który spełnia następujące warunki:

$$\nabla \cdot (e^{-\Phi} \nabla (e^{\Phi} U)) = 0, \nabla \cdot (e^{\Phi} \nabla (e^{-\Phi} V)) = 0,$$

czyli spełnia równanie Poissona - Boltzmanna:

$$\Delta \Phi = M_v \frac{e^{\Phi}}{\int_{\Omega} e^{\Phi} dx} - M_u \frac{e^{-\Phi}}{\int_{\Omega} e^{-\Phi} dx}. \quad (4.18)$$

Równanie to, określone razem z warunkiem brzegowym Dirichleta (3.5) albo z warunkiem (3.6), dla każdego $M_u, M_v \geq 0$, ma jedyne słabe rozwiązanie Φ .

UWAGA!

Podobne równanie możemy znaleźć w opisie między innymi gazu wypełniającego daną przestrzeń, będącym w stanie równowagi - więcej o tym modelu znajdziemy w [6]. Fakt ten świadczy o podobieństwie w modelowaniu zjawisk, które mają co prawda inne własności fizyczne, jednakże nie stanowi to problemu to modelowania rzeczywistości wokół nas tymi samymi narzędziami.

Ewolucja entropii, zadanej wzorem (3.10), w przypadku jednego z warunków brzegowych (3.5) lub (3.6) jest zadana następującym wzorem:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= - \int_{\Omega} u |\nabla(\log(u) + \varphi)|^2 dx - \int_{\Omega} v |\nabla(\log(v) - \varphi)|^2 dx \\ &= - \int_{\Omega} u |\nabla(\log(ue^{\varphi}))|^2 dx - \int_{\Omega} v |\nabla(\log(v e^{-\varphi}))|^2 dx \quad (4.19) \\ &= - \int_{\Omega} u e^{\varphi} |\nabla(\log(ue^{\varphi}))|^2 \frac{e^{-\varphi}}{\int_{\Omega} e^{-\varphi}} dx \cdot \int_{\Omega} e^{-\varphi} dx - \int_{\Omega} v e^{-\varphi} |\nabla(\log(v e^{-\varphi}))|^2 \frac{e^{\varphi}}{\int_{\Omega} e^{\varphi}} dx \cdot \int_{\Omega} e^{\varphi} dx. \end{aligned}$$

Wtedy warunek (3.4) przedstawiamy w następujący - prostszy - sposób:

$$\frac{\partial}{\partial v}(u e^{\varphi}) = \frac{\partial}{\partial v}(v e^{-\varphi}) = 0.$$

Korzystając z wniosków z logarytmicznej nierówności Sobolewa dla przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, Bor(\Omega), \rho_0(x))$ z miarą zadaną wzorem

$$\rho_0(x) = \frac{e^{-\varphi}}{\int_{\Omega} e^{-\varphi} dx},$$

wnioskujemy istnienie stałej zależnej od doboru przestrzeni $C(\Omega) > 0$ takiej, że

$$\int_{\Omega} \Psi\left(\frac{f}{\int_{\Omega} f d\rho_0}\right) d\rho_0 \leq C(\Omega) \int_{\Omega} \Psi''\left(\frac{f}{\int_{\Omega} f d\rho_0}\right) \frac{|\nabla f|^2}{(\int_{\Omega} f d\rho_0)^2} dx,$$

gdzie $\Psi(s) = 1 - s + s \log(s)$, $f = ue^\varphi$. Stąd też otrzymujemy

$$\int_{\Omega} u |\nabla(\log(ue^\varphi))|^2 dx = M_u \int_{\Omega} \Psi''\left(\frac{f}{\int_{\Omega} f d\rho_0}\right) \frac{|\nabla f|^2}{(\int_{\Omega} f d\rho_0)^2} dx,$$

jako, że $\int_{\Omega} f d\rho_0 = \int_{\Omega} ue^\varphi d\rho_0 = \frac{M_u}{\int_{\Omega} e^{-\varphi}}$. Wobec powyższych otrzymujemy

$$\int_{\Omega} u |\nabla(\log(ue^\varphi))|^2 dx \geq \frac{M_u}{C(\Omega)} \int_{\Omega} \left(\frac{f}{\int_{\Omega} f d\rho_0} \log \frac{f}{\int_{\Omega} f d\rho_0} + 1 - \frac{f}{\int_{\Omega} f d\rho_0} \right) d\rho_0$$

albo też

$$\int_{\Omega} u |\nabla(\log(ue^\varphi))|^2 dx \geq \frac{1}{C(\Omega)} \int_{\Omega} u \log\left(\frac{ue^\varphi}{\frac{M_u}{\int_{\Omega} e^{-\varphi}}}\right) dx. \quad (4.20)$$

Analogicznie otrzymujemy to samo szacowanie dla ładunku o gęstości v :

$$\int_{\Omega} v |\nabla(\log(v e^\varphi))|^2 dx \geq \frac{1}{C(\Omega)} \int_{\Omega} v \log\left(\frac{v e^{-\varphi}}{\frac{M_v}{\int_{\Omega} e^\varphi}}\right) dx. \quad (4.21)$$

Oznaczmy przez δ sumę prawych stron nierówności (4.20) - (4.21)

$$\delta = \int_{\Omega} u \log\left(\frac{ue^\varphi}{\frac{M_u}{\int_{\Omega} e^{-\varphi}}}\right) dx + \int_{\Omega} v \log\left(\frac{v e^{-\varphi}}{\frac{M_v}{\int_{\Omega} e^\varphi}}\right) dx. \quad (4.22)$$

Jeśli $\langle U, V, \Phi \rangle$ jest rozwiązaniem równania Poissona - Boltzmana (4.18), zadane razem z jednorodnym warunkiem brzegowym Dirichleta dla Φ , to można pokazać, że

$$\delta = W + J[\varphi] - J[\Phi], \quad (4.23)$$

gdzie W jest funkcjonałem entropii zadany wzorem

$$\begin{aligned} W = & \int_{\Omega} u(x, t) \log(u(x, t)) dx - \int_{\Omega} U(x) \log(U(x)) \\ & + \int_{\Omega} v(x, t) \log(v(x, t)) dx - \int_{\Omega} V(x) \log(V(x)) \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2 dx, \end{aligned} \quad (4.24)$$

a J jest ściśle wypukłym funkcjonałem osiągającym minimum dla funkcji Φ

$$J[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx + M_u \log\left(\int_{\Omega} e^{-\varphi}\right) + M_v \log\left(\int_{\Omega} e^\varphi\right). \quad (4.25)$$

Stąd jasnym jest, że z pierwszej części równania (4.19) oraz z równań (4.20) - (4.22) możemy dobrać odpowiednią stałą $\lambda = \lambda(\Omega) > 0$ zależną od omawianej przestrzeni Ω taką, że $\frac{dW}{dt} + \lambda W \leq 0$, czyli W maleje wykładniczo w zależności od czasu t :

$$W(t) \leq W(0)e^{-\lambda t}. \quad (4.26)$$

QED

4.3 Dowód istnienia i jednoznaczności wyznaczenia stanu stacjonarnego $\langle U, V, \Phi \rangle$

Rozważmy jeszcze raz układ (3.1), z tym, że chcemy wyznaczyć stan stacjonarny:

$$\Delta U + \nabla \cdot (U \nabla \Phi) = 0, \quad \Delta V - \nabla \cdot (V \nabla \Phi) = 0, \quad \Delta \Phi = V - U \quad (4.27)$$

z warunkami brzegowymi

$$\frac{\partial(\exp(-\Phi)U)}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial(\exp(\Phi)V)}{\partial \nu} = 0, \quad \Phi = 0. \quad (4.28)$$

Biorąc iloczyn skalarny alternatywnych postaci dwóch pierwszych równań (4.27) z funkcjami $\exp(\Phi)U$ i $\exp(-\Phi)V$ odpowiednio, otrzymujemy

$$\int_{\Omega} \exp(-\Phi(x)) |\nabla(\exp(\Phi)U(x))|^2 dx = 0, \quad \int_{\Omega} \exp(\Phi(x)) |\nabla(\exp(-\Phi)V(x))|^2 dx = 0. \quad (4.29)$$

Oznacza to, że dla pewnych stałych $\mu_+, \mu_- \geq 0$ mamy $U(x) = \mu_- \exp(-\Phi(x))$ oraz $V(x) = \mu_+ \exp(\Phi(x))$ prawie wszędzie dla $x \in \Omega$. Wtedy potencjał elektryczny $\Phi \in H_0^1(\Omega)$ spełnia równanie Poissona - Boltzmanna

$$\Delta \Phi = \mu_+ \exp(\Phi(x)) - \mu_- \exp(-\Phi(x)) \quad (4.30)$$

z jednorodnym warunkiem początkowym $\Phi|_{\partial\Omega} = 0$, gdy Φ jest klasycznym rozwiązaniem.

Twierdzenie 3. *Jeśli Ω jest ograniczonym obszarem przestrzeni \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, to dla dowolnych $U_0, V_0 > 0$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie stacjonarne $\langle U, V, \Phi \rangle$ układu (4.27) takie, że $\int_{\Omega} U(x) dx = U_0$, $\int_{\Omega} V(x) dx = V_0$.*

Dowód. W przypadku, gdy $U_0 \leq V_0$, to równanie (4.30) zapisujemy w postaci

$$\Delta \Phi = \frac{V_0 - U_0}{\int_{\Omega} \exp(-\Phi)} \exp(-\Phi) + U_0 \left(\frac{\exp(-\Phi)}{\int_{\Omega} \exp(-\Phi)} - \frac{\exp(\Phi)}{\int_{\Omega} \exp(\Phi)} \right),$$

które jest szczególnym przypadkiem równania Poissona - Boltzmanna. Gdy Ω ma brzeg klasy C^2 , wtedy istnienie stabilnego rozwiązania rozważanego układu wynika z twierdzenia Leraya-Schaudera o punkcie stałym w algebrze Banacha dla odpowiedniego operatora całkowego.

Jedyność zaś wynika z argumentów monotoniczności, która również ma zastosowanie w przypadku słabych rozwiązań $\Phi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Powyższe rozważania dotyczące brzegu Ω klasy C^2 pomagały w przypadku, gdy $\Omega = \mathbb{R}^3$. Można jednak osłabić warunki, to jest wywnioskować to samo, co wyżej dla brzegu Ω klasy $C^{1+\varepsilon}$.

QED

5 Przypadek dwuwymiarowy

W sytuacji, gdy mamy przestrzeń dwuwymiarową, zachowanie się asymptotyczne rozwiązań układu (3.1) wymaga dodatkowych badań, ponieważ rozwiązania mają nieliniową asymptotykę, zależną od *samopodobnych rozwiązań*. Ponadto, istnienie stanów stacjonarnych jest ściśle powiązany z danymi zagadnieniami brzegowymi - niewielka zmiana może spowodować, że rozwiązania nie będą spełniać warunku brzegowego.

5.1 Rozwiązania samopodobne w przypadku dwuwymiarowym

Definicja 12. Rozważmy funkcje $u = u(x, t), v = v(x, t)$, będące rozwiązaniami układu (3.1) gdy $\Omega = \mathbb{R}^2$. Mówimy, że funkcje te są:

- *radialne*, jeśli spełniony jest warunek

$$u(x, t) = u(|x|, t), \quad v(x, t) = v(|x|, t)$$

- *samopodobne - niezmiennicze względem skali*, jeśli dla dowolnej stałej $\lambda > 0$ przeskalowane funkcje $\lambda^2 u(\lambda x, \lambda^2 t), \lambda^2 v(\lambda x, \lambda^2 t)$ również są rozwiązaniami układu (3.1).

Dokunując zmian w (3.1), możemy otrzymać układ równań różniczkowych zwyczajnych. Zamiana ta powoduje, że wyznaczenie numeryczne rozwiązań staje się prostszym zadaniem ze względu na nieliniowy i nielokalny charakter równań (3.1), powiązanych z potencjałem φ .

Pierwszym krokiem do dojścia do układu równań zwyczajnych jest definicja następujących funkcji:

$$Q(r, t) = \int_{B_r} u(x, t) dx, \quad P(r, t) = \int_{B_r} v(x, t) dx, \quad (5.1)$$

gdzie B_r oznacza kulę o promieniu r i środku w początku układu współrzędnych. Funkcje Q, P nazywamy *skumulowaną gęstością ładunku* odpowiednio *ujemnego* i *dodatniego*.

Po przecałkowaniu przez daną kulę B_r obustronnie i zamianie zmiennych na zmienne biegunowe, otrzymujemy następujący układ równań, równoważny (3.1) - z tym, że łatwiejszy do numerycznej analizy:

$$\begin{cases} Q_t = Q_{rr} - \frac{1}{r}Q_r + \frac{1}{2\pi r}Q_r(P - Q) \\ P_t = P_{rr} - \frac{1}{r}P_r - \frac{1}{2\pi r}P_r(P - Q) \end{cases} \quad (5.2)$$

Układ ten przy nowych zmiennych ma odpowiednie też warunki w początku:

$$\begin{cases} Q(0, t) = 0, \quad P(0, t) = 0 \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} Q(r, t) = M_u = \int_{\Omega} u_0(x) dx, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} P(r, t) = M_v = \int_{\Omega} v_0(x) dx \end{cases} \quad (5.3)$$

O funkcjach M_u, M_v zakładamy, że są one skończone, tj. $\int_{\mathbb{R}^2} M_u dx, \int_{\mathbb{R}^2} M_v dx < \infty$. Dodatkowo, jeśli przyjmujemy następujące podstawienia

$$Q(r, t) = 2\pi\xi\left(\frac{r^2}{t}\right), \quad P(r, t) = 2\pi\eta\left(\frac{r^2}{t}\right),$$

gdzie $\xi, \eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = \frac{r^2}{t}$. Wtedy układ (5.2) przyjmuje następującą, równoważną, postać:

$$\begin{cases} \xi''(y) + \frac{1}{4}\xi'(y) + \frac{1}{2y}\xi'(y)(\eta(y) - \xi(y)) = 0 \\ \eta''(y) + \frac{1}{4}\eta'(y) - \frac{1}{2y}\eta'(y)(\eta(y) - \xi(y)) = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

z warunkami brzegowymi na początku układu współrzędnych

$$\xi(0) = 0, \quad \eta(0) = 0, \quad (5.5)$$

oraz z warunkiem asymptotycznym w nieskończoności

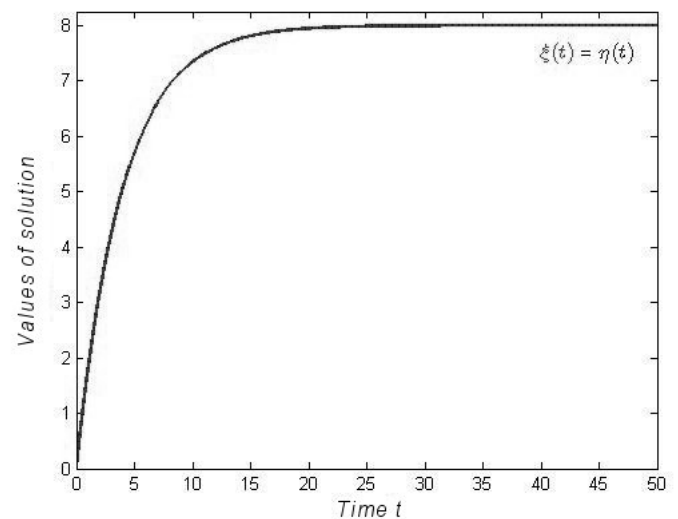
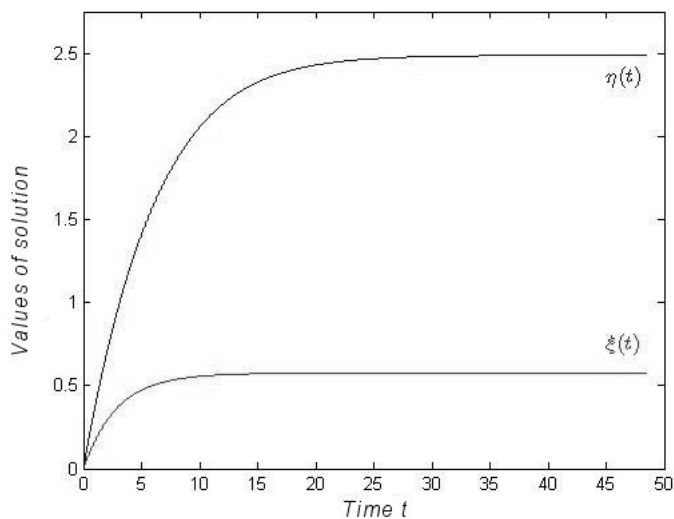
$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \xi(y) = M_\xi = \frac{1}{2\pi}M_u, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \eta(y) = M_\eta = \frac{1}{2\pi}M_v. \quad (5.6)$$

Jednakże w celach numerycznych korzystamy raczej z następujących warunków brzegowych zamiast (5.5):

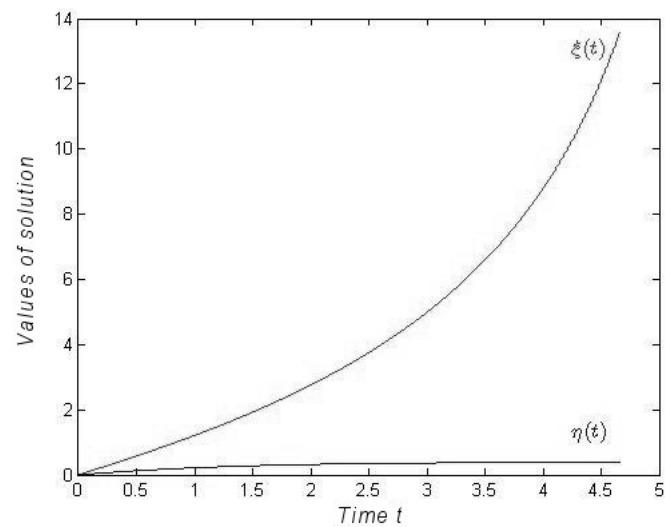
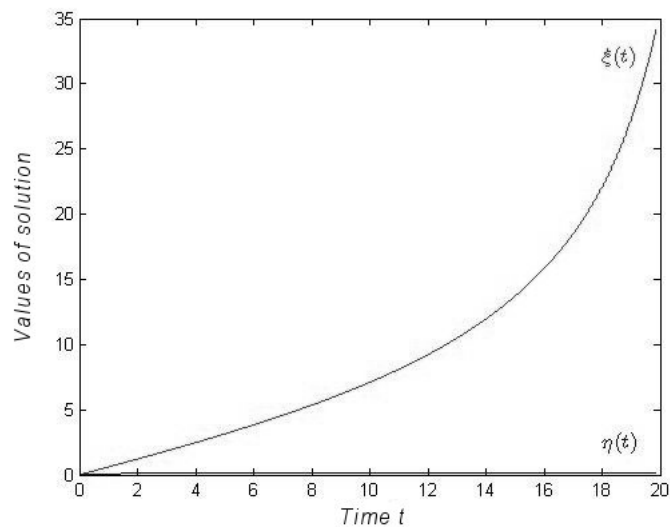
$$\begin{cases} \xi(0) = 0, \xi'(0) = a \\ \eta(0) = 0, \eta'(0) = b, \end{cases} \quad (5.7)$$

przy czym liczby a, b są rzeczywiste nieujemne.

Wykonując symulacje, możemy zauważyć, że dobór parametrów a, b wpływa na zachowanie się rozwiązań układu (5.4).



Rysunek 1: Ograniczone rozwiązania

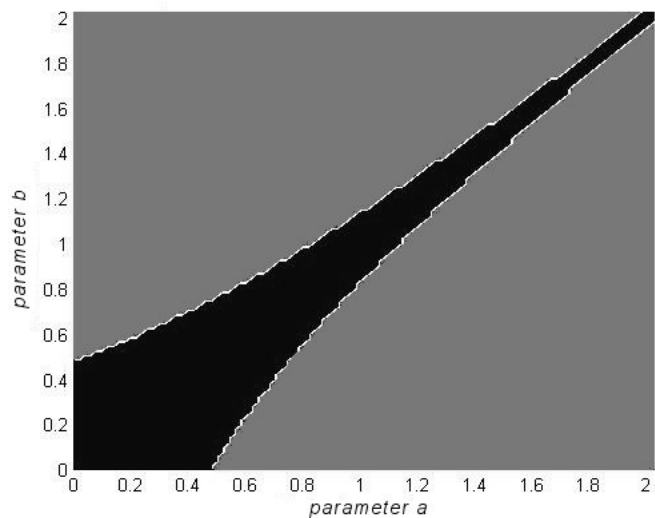


Rysunek 2: Nieograniczone rozwiązania

W przypadku ograniczonych rozwiązań, im mniejsze dane początkowe, tym szybciej następuje stabilizacja ładunku w środowisku (rysunek 1).

Natomiast dla nieograniczonych rozwiązań, im większe wartości początkowe, tym szybciej wzrasta gęstość jednego z ładunków (rusnek 2).

Po zbadaniu metodą Rungego-Kutty warunków, jaki muszą spełniać parametry a , b tak, aby spełnione zostały warunki asymptotyczne brzegowe, otrzymujemy następujący rysunek.



Rysunek 3: Obszar spełniania warunków brzegowych dla układu (3.1)

Jeśli (a, b) jest częścią czarnego obszaru, to dla tak dobranych wartości warunki brzegowe są spełnione.

6 Podsumowanie

Mimo iż temat półprzewodników został dokładnie zbadany, zarówno pod kątem fizycznym (własności, zachowanie się w danych ośrodkach), jak również pod kątem matematycznym (przedstawienie modelu oraz twierdzeń, które wyjaśniają sens istnienia półprzewodników), to wciąż pozostały pewne kwestie, które wymagają doprecyzowania oraz dopracowania. Już w dwuwymiarowym układzie równań Nernsta - Plancka - Debye'a pojawia się kwestia charakteryzacji istnienia przestrzeni całkowitych ładunków samopodobnych rozwiązań - problem ten nie został jeszcze rozwiązany w przypadku gdy warunek równowagi elektrycznej nie jest spełniony. Niemniej jednak, wraz z rozwojem nauki oraz stosowaniem innych (może też i nowych) narzędzi w celu poznawania nieznanych struktur oraz mechanizmów, również i na te pytania będziemy w stanie odpowiedzieć.

Literatura

- [1] H. Stöcker: *Nowoczesne kompendium fizyki*, tłum.: A. Krupski, D. Serwotka, A. Wójtowicz, Wydanie I, Warszawa 2013, 1035-1037, 1046, 1055.
- [2] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands: *Feynmana wykłady z fizyki, t. 3 Mechanika Kwantowa*, tłum.: K. Rejmer, A. Pindor, W. Gorzkowski, A. Szymacha, Wydanie VI, poprawione, Warszawa 2014, *Półprzewodniki*, 231 - 235.
- [3] P. Biler, J. Dolbeault: *Long Time Behavior of Solutions to Nernst-Planck and Debye-Hückel Drift-Diffusion Systems*, *Annales Henri Poincaré* 1 (2000), 461 - 472.
- [4] Ł. Paszkowski: *Self-similar solutions for the two-dimensional Nernst-Planck-Debye system*, *Applicationes Mathematicae* 39 (2012), 329-334.
- [5] P. Biler, W. Hebisch, T. Nadzieja: *The Debye system: Existence and Large Time Behavior of solutions*, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, Vol. 23, No. 9, 1202 - 1203.
- [6] A. Krzywicki, T. Nadzieja, *Some results concerning the Poisson-Boltzmann equation*, *Zastosowania Matematyki - Applicationes Mathematicae* 31, 2 (1991), 265-272.