

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalności: Analiza danych, Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Weronika Szota

**Czy mamy szanse żyć wiecznie?
Analiza porównawcza długości życia w modelu
dynamicznym**

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
dra Marka Arendarczyka

Wrocław 2021

Spis treści

Wstęp	3
1 Matematyczny opis śmiertelności	5
1.1 Podstawowe pojęcia matematyki ubezpieczeniowej	5
1.2 Założenia modelu i estymacja parametrów	8
1.3 HMD - Human Mortality Database	10
1.4 Aplikacja modelu do danych	11
2 Parametr κ_t jako szereg czasowy	16
2.1 Szeregi czasowe - wprowadzenie	16
2.2 Dopasowanie	19
2.2.1 Polska	20
2.2.2 Pozostałe dopasowania	24
2.3 Prognozy	25
3 Co przyniesie przyszłość	26
Podsumowanie	32
Załącznik A	33
Bibliografia	49

Wstęp

In vita mors certa est ~ W życiu tylko śmierć jest pewna

Powyższa sentencja, brzmiąca na pozór dość banalnie, oprócz refleksji dotyczącej końca naszej egzystencji, nasuwa szereg pytań związanych z opisem długości trwania ludzkiego życia, będącej przedmiotem rozważań niniejszej pracy. Dynamika towarzysząca zmianom tej długości niesie za sobą wiele wyzwań dla systemu emerytalnego, jak również prywatnych ubezpieczeń na życie. Z uwagi na nieustannie zmieniającą się długość trwania ludzkiego życia, powstaje ryzyko niedoszacowania kosztów związanych z kalkulacją składki ubezpieczeniowej. Rodzi to potrzebę nakreślenia kształtu dalszych zmian, których dynamiki nie jesteśmy w stanie zahamować. Poszukiwania remedium opisanego wyżej problemu mają już swoją bogatą historię, jednakże niektóre próby analitycznego opisu śmiertelności, jak na przykład Prawo de Moivre'a czy Gompertza, nie znajdują zastosowania w obecnej rzeczywistości.

Rozwiązaniem adekwatnym do rozważanego problemu wydaje się być próba stochastycznego modelowania zmian śmiertelności. Jednym z kluczowych modeli zgodnych z tą konwencją jest model Lee-Cartera (L-C) [5; 9; 11; 13], którego założenia pozwolą nam na dokonanie przekrojowej analizy porównawczej zmian śmiertelności w sześciu następujących krajach: Polsce, Stanach Zjednoczonych, Belgii, Japonii, Australii i Chile. Uzyskane rezultaty są podstawą do dalszego wnioskowania na temat charakterystyki śmiertelności w perspektywie kilkudziesięciu, a nawet kilkuset najbliższych lat.

W rozdziale 1 zapoznamy się z elementarnymi pojęciami stosowanymi w matematyce ubezpieczeniowej, które wprowadzą nas w obszar dalszych rozważań. Przedstawimy również założenia modelu Lee-Cartera oraz metodę estymacji parametrów tego modelu. Następnie model L-C zostanie zaaplikowany do danych dotyczących śmiertelności obserwowanej w sześciu rozważanych krajach.

Rozdział 2 poświęcony jest natomiast analizie jednej ze składowych modelu, czyli parametrowi κ_t . Zgodnie z założeniami modelu L-C, wartości tego parametru mogą być traktowane jako realizacje szeregu czasowego. Stąd w rozdziale 2 przedstawimy elementy teorii szeregów czasowych, niezbędne do dopasowania procesu adekwatnego do analizowanych danych. Klasycznie proces błędzenia losowego z dryfem [13] uważany jest za najbardziej optymalne rozwiązanie, jednakże otrzymane przez nas wyniki pokażą, iż nie jest to jedyny możliwy wybór. W głównej części pracy zaprezentowany zostanie opis dopasowania procesu dla danych dotyczących Polski. Natomiast załącznik A zawiera opis analogicznego rozumowania dla pozostałych pięciu państw. Po dopasowaniu modelu dla każdego z rozważanych państw dokonamy prognozy przyszłych wartości parametru κ_t , które umożliwią nam opisanie zmian śmiertelności w perspektywie najbliższych lat.

Konsekwencje płynące z otrzymanych prognoz omówione zostaną w rozdziale 3. Przedstawimy w nim charakterystykę średniej przyszłego czasu życia opartą na uzyskanych wcześniej przewidywaniach. Pozwoli to na ocenę przewagi prezentowanego w niniejszej pracy podejścia nad klasycznymi modelami opartymi na „statycznych” tablicami trwania życia. Porównamy również, jak w zależności od rozpatrywanego kraju zmienia się kształt oczekiwanych zmian. Zbadamy, jak długi może być obserwowany obecnie wzrost długości trwania ludzkiego życia i czy ma on swój koniec. Zastanowimy się również, czy istnieje wiek graniczny, czy może jednak człowiek ma szansę żyć wiecznie.

Wykorzystane na potrzeby niniejszej pracy dane pochodzą z bazy *HMD (Human Mortality Database)* [8], dostarczającej informacji o wybranych wskaźnikach opisujących długość życia. Pozwoliły one na przeprowadzenie analiz, stanowiących podstawę do wnioskowania na temat trendów śmiertelności w perspektywie najbliższych lat. Podczas gdy w większości dostępnych publikacji, autorzy skupiają się głównie na ocenie jakości modelu L-C i aplikacji modelu do populacji wybranego kraju, przedstawiona w niniejszej pracy, przekrojowa analiza ma na celu zestawienie sytuacji w różnych częściach świata.

Rozdział 1

Matematyczny opis śmiertelności

Zmiana długości trwania ludzkiego życia w bezpośredni sposób oddziałuje na kalkulację składek ubezpieczeniowych, bowiem wymagają one odpowiedniej prognozy śmiertelności, biorącej pod uwagę jej ciągłą dynamikę. Aktuariusze stają więc przed wyzwaniem tworzenia tak zwanych *dynamicznych tablic trwania życia*, które oprócz obserwacji przeszłych zmian, uwzględniają prognozy trendów związanych ze śmiertelnością. Powstało wiele modeli próbujących przewidywać te zmiany. Jednym z podstawowych jest zaproponowany w 1992 roku model Lee-Cartera, któremu poświęcony jest ten rozdział. Przyjrzymy się założeniom tego modelu, estymacji jego parametrów i spróbujemy zaaplikować go do odpowiednich danych.

1.1 Podstawowe pojęcia matematyki ubezpieczeniowej

W celu pełnego zrozumienia działania modelu i zmian przez niego prognozowanych konieczne jest wprowadzenie kilku przydatnych pojęć stosowanych w matematyce ubezpieczeniowej.

Rozpocznijmy od tego, że osobę w wieku x nazywać będziemy x -latkiem. Z każdym x -latkiem stowarzyszone są charakterystyki opisujące jego przyszły czas życia.

Definicja 1.1 (Przyszły czas życia)

Przyszły czas życia x -latka oznaczany przez T_x definiujemy jako zmienną losową opisującą czas, który pozostał osobie w wieku x do momentu śmierci. Rozkład zmiennej T_x wyznaczony jest za pomocą dystrybuanty $F_x(s)$ lub gęstości $f_x(s)$. Natomiast przyszły czas życia x -latka oznaczany przez $T_x(t)$ definiujemy jako zmienną losową opisującą czas, który pozostał osobie w wieku x do momentu śmierci, ustalony w roku kalendarzowym t .

Naturalnie T_x przyjmuje wartości nieujemne. Jednym z aspektów, które chcielibyśmy rozważać jest rozstrzygnięcie szansy na przeżycie, opisywane przez funkcję przeżycia.

Definicja 1.2 (Funkcja przeżycia)

Funkcję przeżycia $S(t) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ definiujemy jako

$$S(t) = \mathbb{P}(T_0 > t).$$

Do oceny szans przeżycia danego x -latka oprócz wspomnianej funkcji przeżycia, możemy również wyznaczyć prawdopodobieństwa przeżycia.

Definicja 1.3 (Prawdopodobieństwo przeżycia)

Wartość oznaczaną przez ${}_s p_x(t)$ rozumiemy jako prawdopodobieństwo przeżycia przez x -latka co najmniej s lat ustalone w roku kalendarzowym t i definiujemy w poniższy sposób

$${}_s p_x(t) = \mathbb{P}[T_x(t) > s].$$

Dla $s = 1$ stosujemy oznaczenie $p_x(t)$.

Zachowanie ${}_s p_x(t)$ możemy dość intuicyjnie powiązać z korespondującymi zmianami długości trwania ludzkiego życia. Naturalnie, gdy długość ta ulega wydłużeniu, to wartość ${}_s p_x(t)$ rośnie na przestrzeni lat kalendarzowych t dla ustalonego wieku x . Z sytuacją odwrotną mamy do czynienia obserwując zmiany wartości prawdopodobieństwa śmierci.

Definicja 1.4 (Prawdopodobieństwo śmierci)

Prawdopodobieństwo śmierci x -latka w ciągu s najbliższych lat ustalone w roku kalendarzowym t oznaczamy jako ${}_s q_x(t)$ i definiujemy jako

$${}_s q_x(t) = \mathbb{P}[T_x(t) \leq s].$$

Gdy $s = 1$ piszemy krótko $q_x(t)$.

Jak to zostało wspomniane wyżej, w przypadku wydłużania się długości trwania życia dla ustalonego wieku x wartość ${}_s q_x(t)$ maleje na przestrzeni lat kalendarzowych t . Z prawdopodobieństwem śmierci ściśle związane jest pojęcie *natężenia śmiertelności*.

Definicja 1.5 (Natężenie śmiertelności)

Natężenie śmiertelności $\mu_x(t)$ rozumiane jako wielkość wyrażającą śmiertelność dla ustalonego wieku x w danym roku kalendarzowym t definiujemy jako:

$$\mu_x(t) = \lim_{\Delta \searrow 0} \frac{\mathbb{P}[x < T_0(t-x) + \Delta | T_0(t-x) > x]}{\Delta},$$

gdzie $T_0(t-x)$ oznacza długość przyszłego czasu trwania życia osoby urodzonej w roku kalendarzowym $t-x$.

Na ustalonym przedziale $(x, x+1)$ zwykle zamiast wartości natężenia śmiertelności rozważać będziemy wartość współczynnika zgonów dla wieku x .

Definicja 1.6 (Współczynnik zgonów)

Współczynnik zgonów dla ustalonego wieku x oznaczamy przez m_x i definiujemy jako:

$$m_x = \frac{\int_0^1 S(x+u) \mu_{x+u} du}{\int_0^1 S(x+u) du} = \frac{S(x) - S(x+1)}{\int_0^1 S(x+u) du}.$$

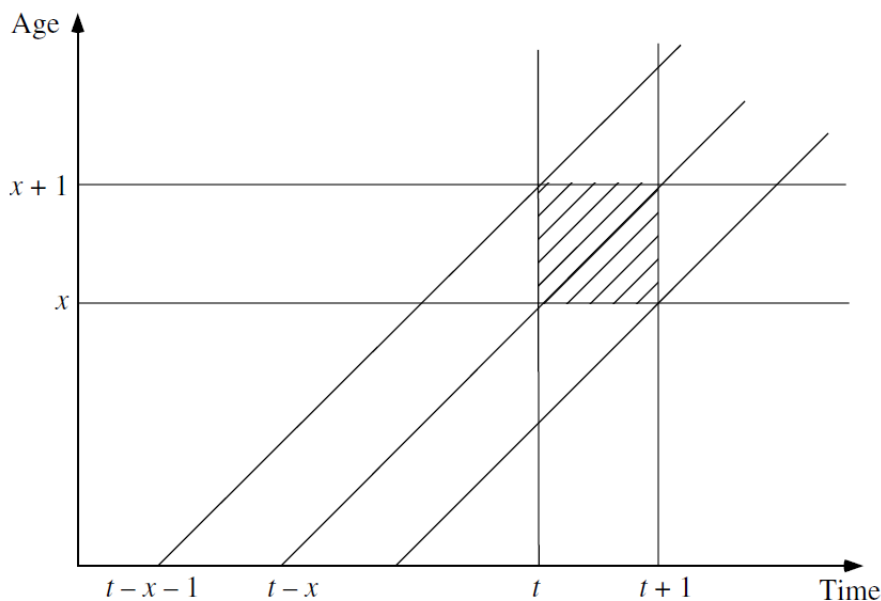
W kontekście dalszych rozważań kluczowe jest wprowadzenie założenia mówiącego o tym, że wielkość natężenia śmiertelności jest stała na każdym kwadracie $(t, t+1) \times (x, x+1)$, ale może zmieniać przyjmowaną wartość zależnie od rozpatrywanego kwadratu. Założenie to skutkuje następującą równością:

$$\mu_{x+\zeta_1}(t+\zeta_2) = \mu_x(t), \quad \text{gdzie } 0 \leq \zeta_1, \zeta_2 < 1, \quad (1.1)$$

na mocy, której otrzymujemy równość natężenia śmiertelności i współczynnika zgonów dla ustalonego x w roku kalendarzowym t :

$$\mu_x(t) = m_x(t). \quad (1.2)$$

Ilustracją równości (1.1) jest diagram Lexisa przedstawiony na wykresie 1. Na osi rzędnych zaznaczono zmiany wartości wieku x , natomiast oś odciętych podzielona została ze względu na wartości roku kalendarzowego t . Jak już wspominaliśmy na zaznaczonym kwadracie wartość natężenia śmiertelności jest stała.



Wykres 1: Diagram Lexisa ilustrujący równość (1.1), źródło [13].

Z równości (1.1) wynika również, iż dla całkowitego wieku x oraz roku kalendarzowego t prawdziwa jest tożsamość:

$$p_x(t) = \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+\xi}(t+\xi)d\xi\right) = \exp(-\mu_x(t)). \quad (1.3)$$

Na potrzeby analizy modelu Lee-Cartera, konieczne jest jeszcze zdefiniowanie dwóch wielkości, które okażą się niezbędne podczas aplikacji modelu do rzeczywistych danych. Pierwszą z nich jest *exposure-to-risk*.

Definicja 1.7 (Exposure-to-risk)

Exposure-to-risk dla wieku x w roku kalendarzowym t definiujemy jako całkowity czas przeżyty przez x -latków w roku t i oznaczamy przez ETR_{xt} . Jeżeli przez τ_i oznaczymy część roku t przeżyta przez i -tą osobę, to w rezultacie otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{L_{xt}} \tau_i = ETR_{xt},$$

gdzie L_{xt} jest liczbą x -latków na początku roku kalendarzowego t .

Drugą wielkością, której potrzebujemy jest wartość opisująca liczbę zgonów.

Definicja 1.8 (D_{xt})

D_{xt} definiujemy jako liczbę x -latków zmarłych w roku kalendarzowym t .

Stosując wprowadzone wyżej oznaczenia, z każdą z L_{xt} osób możemy utożsamić zmienną losową δ_i zdefiniowaną jako:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i \text{ – ta osoba umiera w wieku } x \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, L_{xt}$. W konsekwencji zachodzi równość

$$\sum_{i=1}^{L_{xt}} \delta_i = D_{xt}.$$

Ostatnim wskaźnikiem charakteryzującym długość trwania ludzkiego życia, któremu chcielibyśmy się przyjrzeć jest *średnia przyszłego czasu życia*.

Definicja 1.9 (Średnia przyszłego czasu życia)

Średnią (wartością oczekiwaną) przyszłego czasu życia, oznaczaną przez \mathring{e}_x , nazywamy wielkość definiowaną jako

$$\mathring{e}_x = \mathbb{E}[T_x] = \int_0^{\infty} t f_x(t) dt = \int_0^{\infty} {}_t p_x dt.$$

Po zapoznaniu się z elementarnymi pojęciami matematyki ubezpieczeniowej, które wykorzystywać będziemy w dalszych rozważaniach, przejdziemy teraz do próby efektywnego opisanie zmian śmiertelności, przedstawionej przez model Lee-Cartera.

1.2 Założenia modelu i estymacja parametrów

W celu możliwie najlepszego dopasowania się do rozważanego problemu, badane przez nas natężenie śmiertelności powinno być analizowane jako funkcja dwóch zmiennych: wieku x oraz roku kalendarzowego t . Pozwala to na obserwację zmian trendu śmiertelności dla konkretnych x -latków na przestrzeni kolejnych lat. Co więcej, dynamiczna prognoza śmiertelności powinna brać pod uwagę jej stochastyczne własności. Model winien być budowany w oparciu o dwa kluczowe założenia [13], mówiące o tym, że:

- Obserwowane wartości wskaźnika śmiertelności są realizacją zmiennych losowych reprezentujących przeszłą śmiertelność.
- Przewidywane wartości wskaźnika śmiertelności są estymatorami parametrów zmiennych losowych reprezentujących przyszłą śmiertelność.

Wykorzystywany do prognozowania śmiertelności model Lee-Cartera, zgodny z opisaną wyżej konwencją, objaśnia logarytm natężenia śmiertelności. Zakłada, że przyjmuje on następującą postać:

$$\log \mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_x(t), \quad (1.4)$$

gdzie:

- $\mu_x(t)$ to obserwowane natężenie śmiertelności dla x -latka w roku t ;
- α_x estymowane jako średnie wartości $\log \widehat{\mu}_x(t)$ na przestrzeni rozpatrywanych lat, $\exp(\alpha_x)$ nakreśla kształt krzywej natężenia śmiertelności;

- β_x odpowiada za trend zmian natężenia śmiertelności dla konkretnego wieku x ;
- κ_t określa zmiany poziomów natężenia śmiertelności w czasie;
- $\epsilon_x(t)$ to niezależne błędy losowe pochodzące z rozkładu normalnego o średniej 0 i wariancji σ^2 , utożsamiane z wpływem historycznym dla danego wieku.

W celu jednoznacznej identyfikacji modelu przyjmuje się dwa dodatkowe założenia:

$$\sum_{x=x_1}^{x_m} \beta_x = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{t=t_1}^{t_n} \kappa_t = 0. \quad (1.5)$$

Warto zauważyć, że model L-C nie jest klasycznym modelem regresji, gdyż po prawej stronie równania nie występują zmienne objaśniające [9]. Nie dysponujemy obserwowanymi wartościami $\alpha_x, \beta_x, \kappa_t$. Są to parametry, które należy estymować. W tym celu wykorzystamy metodę największej wiarygodności.

Na mocy równości (1.4) wiemy, że $\log \mu_x(t)$ jako suma składnika deterministycznego ($\alpha_x + \beta_x \kappa_t$) i losowego $\epsilon_x(t)$ jest zmienną losową pochodzącą z rozkładu normalnego o średniej ($\alpha_x + \beta_x \kappa_t$) i wariancji σ^2 . Zgodnie z założeniem (1.2) rozważać będziemy $\log m_x(t)$. Próba, którą dysponujemy, składa się z realizacji omawianej zmiennej losowej, będących postaci

$$\log m_x(t),$$

gdzie $x = x_1, x_2, \dots, x_m$ i $t = t_1, t_2, \dots, t_n$. Wtedy funkcja wiarygodności będąca iloczynem gęstości całej próby wyraża się następującym wzorem

$$L(x, t) = \prod_{x=x_1}^{x_m} \prod_{t=t_1}^{t_n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left(- \frac{(\log m_x(t) - (\alpha_x + \beta_x \kappa_t))^2}{2\sigma^2} \right).$$

W celu ułatwienia rachunków, wygodnie jest rozważać logarytm powyższej funkcji. Uzyskujemy wtedy

$$l(x, t) = \log L(x, t) = m \cdot n \log \sqrt{2\pi}\sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (\log m_x(t) - (\alpha_x + \beta_x \kappa_t))^2.$$

Metoda największej wiarygodności opiera się na maksymalizacji funkcji wiarygodności, równoważnie na maksymalizacji logarytmu tej funkcji. Ponieważ σ^2 przyjmuje wartości nieujemne, zatem maksymalizacja logarytmu funkcji wiarygodności sprowadza się do minimalizacji następującego wyrażenia:

$$O_{LS}(\alpha, \beta, \kappa) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (\log \widehat{m}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2. \quad (1.6)$$

Przyrównanie pochodnej prawej strony równania (1.6) skutkuje następującą zależnością:

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \log \widehat{m}_x(t) = (t_n - t_1 + 1)\alpha_x + \beta_x \sum_{t=t_1}^{t_n} \kappa_t.$$

Mając na uwadze założenie (1.5) uzyskujemy estymację parametru α_x :

$$\widehat{\alpha}_x = \frac{1}{t_n - t_1 + 1} \sum_{t=t_1}^{t_n} \log \widehat{m}_x(t). \quad (1.7)$$

Autorzy modelu [9] proponują by estymatory $\widehat{\beta}_x, \widehat{\kappa}_t$ uzyskiwać z wykorzystaniem rozkładu według wartości osobliwych (*SVD*) macierzy $Z = \log \widehat{M} - \widehat{\alpha}_x$, gdzie $\widehat{\alpha}$ wyznaczone jest zgodnie z (1.7), a macierz M jest postaci:

$$M = \begin{pmatrix} m_{x_1}(t_1) & m_{x_1}(t_2) & \dots & m_{x_1}(t_n) \\ m_{x_2}(t_1) & m_{x_2}(t_2) & \dots & m_{x_2}(t_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_{x_m}(t_1) & m_{x_m}(t_2) & \dots & m_{x_m}(t_n) \end{pmatrix}.$$

Wtedy otrzymane wektory estymatorów $\widehat{\beta}$ oraz $\widehat{\kappa}$ dane są wzorami:

$$\widehat{\beta} = \frac{v_1}{\sum_{j=1}^{x_m-x_1+1} v_{1j}} \quad \text{oraz} \quad \widehat{\kappa} = \sqrt{\lambda_1} \left(\sum_{j=1}^{x_m-x_1+1} v_{1j} \right) u_1, \quad (1.8)$$

gdzie v_1 jest wektorem własnym związanym z największą wartością własną macierzy ZZ^T , a u_1 jest analogicznym wektorem dla macierzy $Z^T Z$. Szczegółowy opis aplikacji powyższej metody prowadzący do uzyskania estymatorów parametrów modelu znajdziemy w załączniku A pracy [9].

Zwróćmy uwagę, że dla ustalonego x wartości α_x oraz β_x są stałe, zmienia się natomiast parametr κ_t , którego wartość zależy od rozpatrywanego roku kalendarzowego t . W prognozie przyszłych wartości natężenia śmiertelności kluczową rolę odgrywa zatem estymacja parametru κ_t . Model L-C zakłada, iż na potrzeby prognozowania zachowania tego parametru przyjmujemy, że wielkości $\widehat{\kappa}_t$ są realizacją szeregu czasowego będącego procesem *ARIMA*(p, d, q) z odpowiednio wyznaczonymi parametrami [9].

Zanim jednak skupimy się na dopasowaniu szeregu czasowego do otrzymanych wartości $\widehat{\kappa}_t$, spróbujemy nieco poprawić dotychczasowe wyniki, by możliwie najlepiej dopasować się do rzeczywistych danych. Uzyskane wielkości $\widehat{\kappa}_t$ reestymujemy tak, aby dla ustalonego t estymator $\widehat{\kappa}_t$ był rozwiązaniem równania

$$\sum_{x=x_1}^{x_m} D_{xt} = \sum_{x=x_1}^{x_m} ETR_{xt} \exp(\widehat{\alpha}_x + \widehat{\beta}_x \zeta) \quad (1.9)$$

w ζ , gdzie $\widehat{\alpha}_x$ oraz $\widehat{\beta}_x$ są uprzednio uzyskanymi estymatorami, a D_{xt} i ETR_{xt} są rzeczywistymi wartościami obserwowanymi dla danej populacji. Ponowna estymacja $\widehat{\kappa}_t$ ma kilka zalet. Główną z nich jest uniknięcie rozbieżności pomiędzy przewidywaną a faktyczną liczbą zgonów [5] wyrażoną przez D_{xt} . Z uwagi na fakt, że nie istnieje rozwiązanie równania (1.9) zadane jawnym wzorem, pociąga to za sobą konieczność numerycznego wyznaczenia rozwiązania tego równania, z wykorzystaniem na przykład metody Newtona-Raphsona.

1.3 HMD - Human Mortality Database

Dane niezbędne do analiz przeprowadzonych na potrzeby niniejszej pracy i w niej przedstawionych pozyskane zostały z bazy *HMD* (*Human mortality database*) [8]. To rzetelne źródło danych statystycznych dotyczących śmiertelności, dostarcza informacji związanych z populacjami 41 krajów. Wykorzystane w pracy dane dotyczyły m.in.: liczby zgonów, exposure-to-risk, wskaźnika umieralności. Wybór analizowanych populacji miał na celu porównanie zachowania natężenia śmiertelności w różnych częściach świata.

1.4 Aplikacja modelu do danych

Przedstawioną teorię dotyczącą modelu Lee-Cartera oraz estymacji parametrów modelu zaaplikujemy teraz do rzeczywistych danych. Przeanalizujemy zachowanie estymatorów $\widehat{\alpha}_x, \widehat{\beta}_x$ oraz $\widehat{\kappa}_t$ uzyskanych na podstawie współczynnika zgonów obserwowanego w: Polsce, Stanach Zjednoczonych, Belgii, Japonii, Australii oraz Chile.

Ze względu na różną dostępność danych, każde z analizowanych państw wymaga indywidualnego doboru rozpatrywanego okresu kalendarzowego oraz wieku. Analizy przeprowadzimy bez podziału ze względu na płeć. W tym miejscu nasuwa się jednak kluczowe pytanie dotyczące wyboru rozważanych lat kalendarzowych i wieku, mianowicie: *Jak dokonać wyboru danych by był on optymalny dla rozważanego problemu?* Jak już wspomnieliśmy wybór ten będzie dokonywany odrębnie dla każdego z państw. Naturalnym ograniczeniem jest dostępność danych. Nie jest ona taka sama dla każdego kraju, co mocno zawęży nasze analizy. W praktyce chcielibyśmy modelować przyszłe zmiany estymatora $\widehat{\kappa}_t$, zatem z jednej strony dobrze byłoby dysponować obserwacjami z możliwie najszerszego przedziału czasowego, by jak najlepiej oddać charakter tych zmian. Z drugiej zaś, mając na uwadze tempo postępu, który dokonuje się codziennie na naszych oczach zbyt duży krok wstecz w pewnym stopniu zagłusza obecną dynamikę. Poza tym wybór lat kalendarzowych musi współgrać z wyborem analizowanego wieku x . Gdy nasze analizy ograniczymy do $x \in \{0, 1, 2, \dots, 100\}$, to z pewnością zbiór obserwacji dostępnych dla takich wymagań jest większy, niż gdy rozważamy $x \in \{0, 1, 2, \dots, 110\}$. Mamy więcej obserwacji, ale cena, którą za to płacimy to stałe ograniczenie się do maksymalnego wieku $x = 100$ skutkujące tym, że nie dopuszczamy efektu wydłużenia się długości trwania ludzkiego życia, na którym nam zależy. Kolejny aspekt, który należy uwzględnić przy doborze lat kalendarzowych, to eliminacja wydarzeń, które mogłyby przesądzić o skrajnym zachowaniu śmiertelności, jak na przykład pandemie.

Powyższe rozważania wskazują na to, że wybór, którego dokonamy nigdy nie będzie optymalny. Możemy jedynie mniej lub bardziej zaufać swoim intuicjom i eksperymentować z różnymi doborami wieku i lat kalendarzowych. Czasem różnice nie są zbyt duże, czasem mają one jednak zauważalny wpływ. Nie zawsze również uda nam się uchwycić zachowanie, którego się spodziewamy. Do tego wszystkiego dochodzą także błędy obliczeniowe, które w pewnym stopniu mogą zaburzyć nasze analizy.

Mając na uwadze wszystkie problemy, z którymi może przyjąć nam się zmierzyć, spróbujmy zaaplikować model Lee-Cartera do rzeczywistych danych na podstawie wyborów przedstawionych w tabeli 1.

	x_1	x_m	t_1	t_n
Polska	0	104	1980	2018
Stany Zjednoczone	0	110	1955	2019
Belgia	0	103	1970	2018
Japonia	0	104	1965	2019
Australia	0	104	1970	2018
Chile	0	107	1992	2017

Tabela 1: Wybór optymalnych lat kalendarzowych i wieku dla poszczególnych państw.

Spójrzmy najpierw, jak prezentują się wartości estymatora $\widehat{\alpha}_x$ dla każdej z analizowanych populacji. Zostały one przedstawione na wykresie 2.

Obserwujemy, iż niezależnie od rozważanej populacji parametr $\widehat{\alpha}_x$ zachowuje się w podobny sposób. Najpierw jego wartość gwałtownie maleje, następnie stosunkowo szybko rośnie. Począwszy od wieku x o wartości około 25 zmiany estymatora $\widehat{\alpha}_x$ mają charakter eksponencjalny. Wartości przyjmowane przez $\widehat{\alpha}_x$ są porównywalne dla każdego z analizowanych państw.

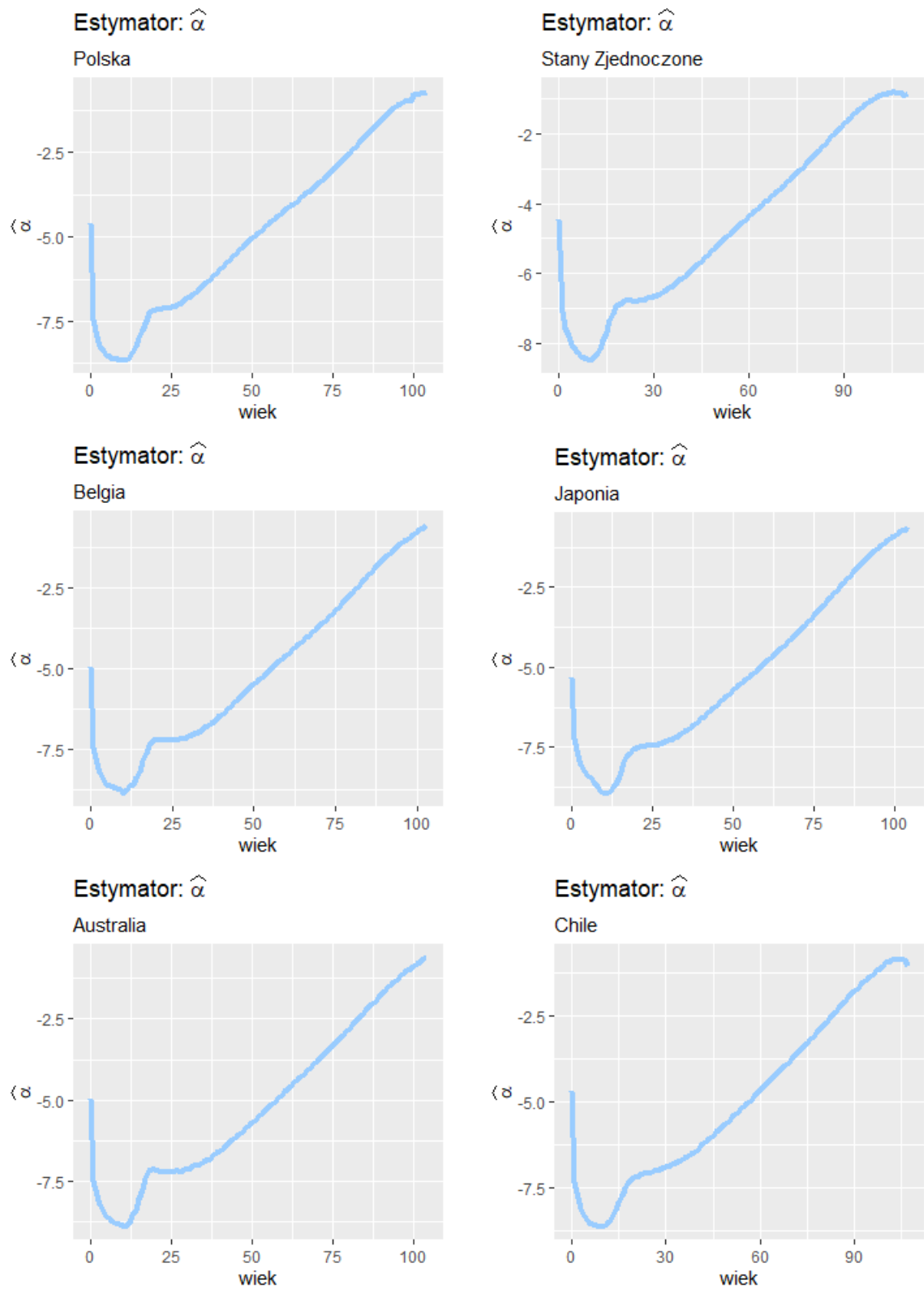
Zobaczmy, jak przedstawiają się zmiany wartości estymatora $\widehat{\beta}_x$, które widoczne są na wykresie 3.

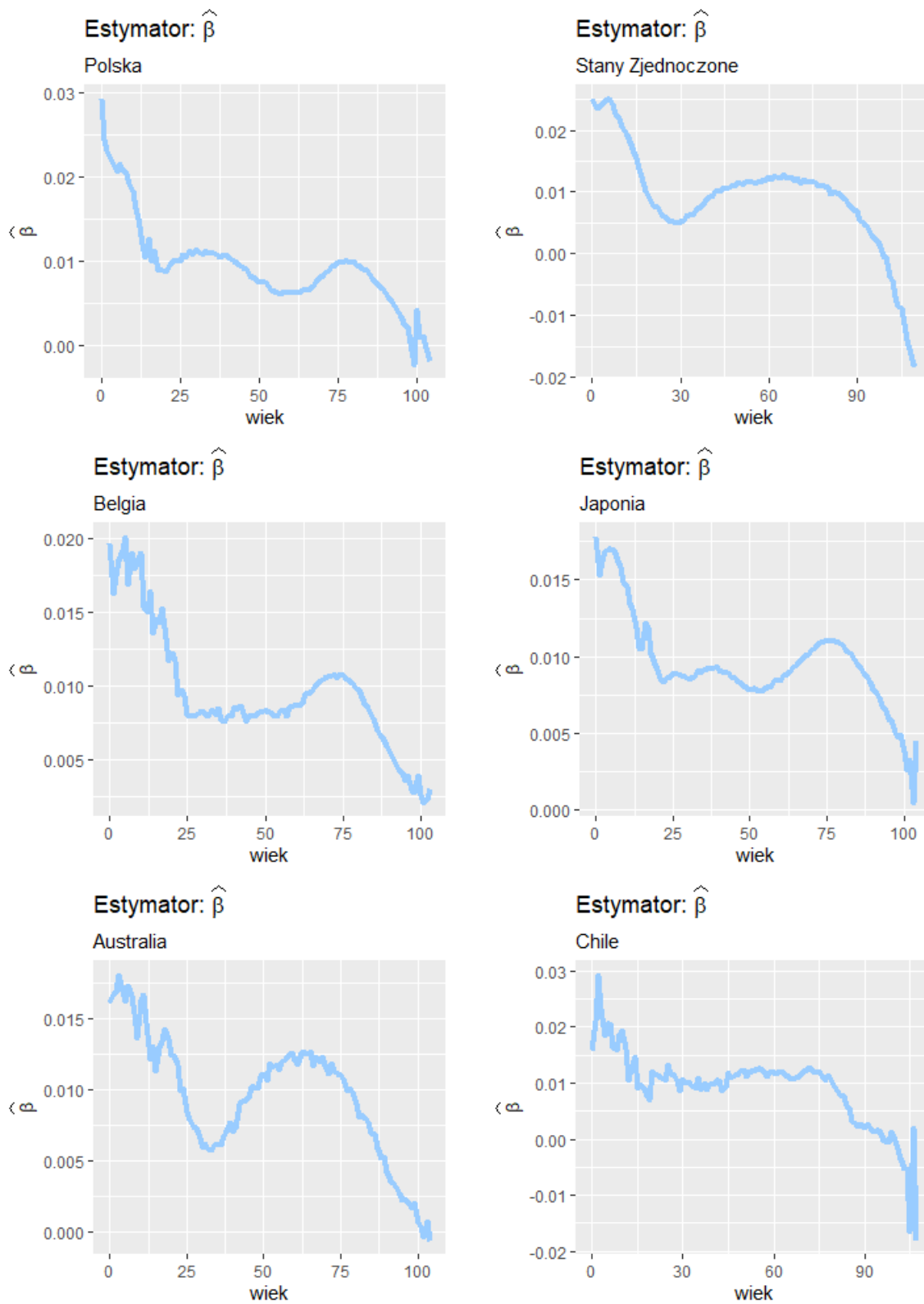
Zachowanie $\widehat{\beta}_x$ jest bardziej zróżnicowane niż zachowanie $\widehat{\alpha}_x$. Możemy zauważyć, że wykres uzyskany dla Stanów Zjednoczonych jest gładki, co prawdopodobnie związane jest z faktem, iż dla tego państwa dysponowaliśmy największą liczbą obserwacji. Pozostałe wykresy są nieco bardziej nieregularne, co może być spowodowane błędami obliczeniowymi. Dostrzec możemy pewne podobieństwa pomiędzy konkretnymi państwami. Na przykład kształt zmian estymatora $\widehat{\beta}_x$ uzyskany w oparciu o dane dotyczące Stanów Zjednoczonych jest zbliżony do rezultatu, który otrzymaliśmy dla danych dotyczących Australii. Podobnie dla wykresów prezentujących zmiany $\widehat{\beta}_x$ dla Polski, Japonii i Belgii, krzywe mają podobny kształt, jednakże zauważamy rozbieżności w wartościach $\widehat{\beta}_x$.

Zweryfikujmy jeszcze zachowanie estymatora $\widehat{\kappa}_t$, które przedstawia wykres 4.

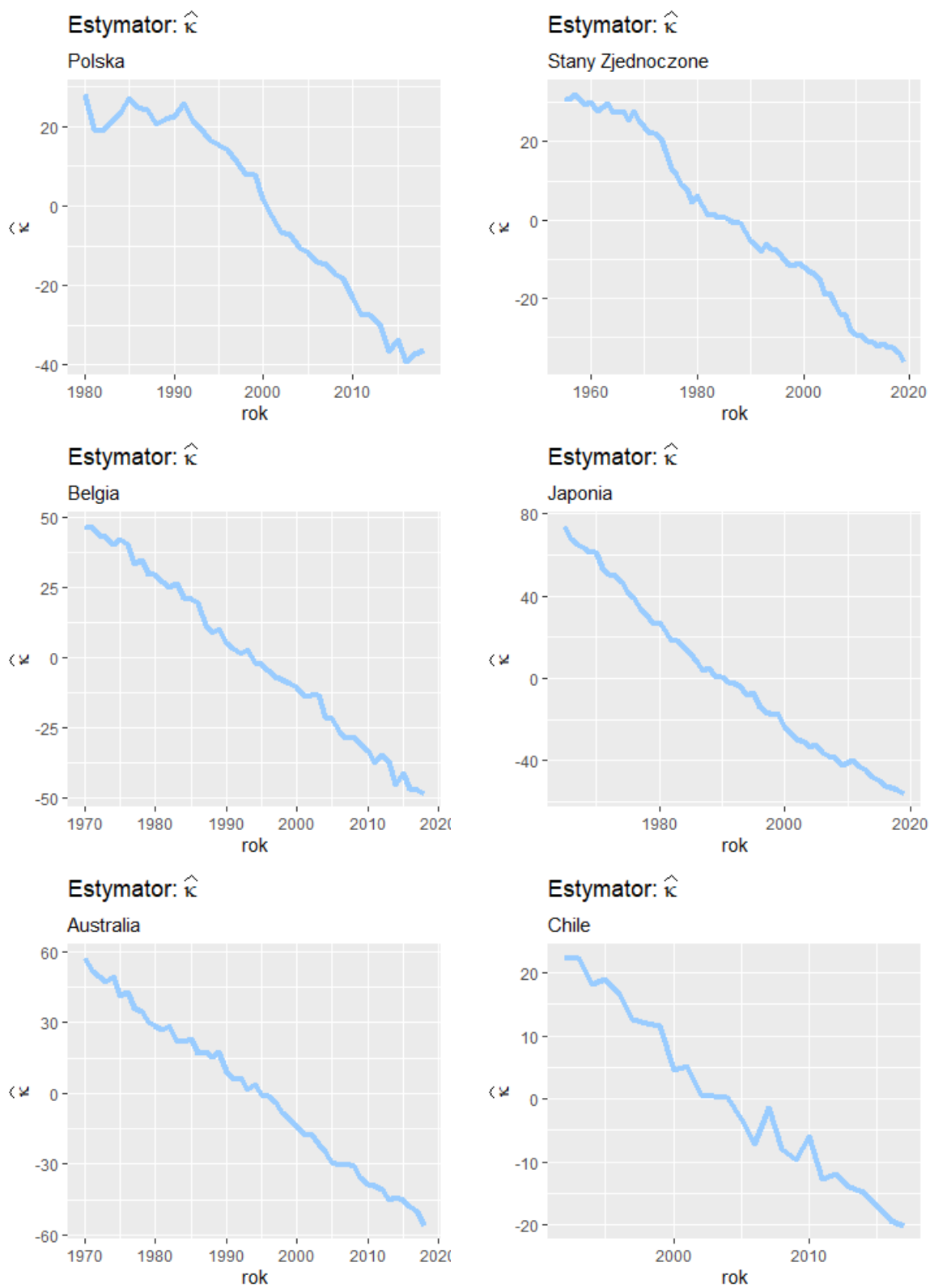
Widzimy, że zmiany wartości $\widehat{\kappa}_t$ mają charakter liniowy dla: Belgii, Japonii i Australii. Dla Polski obserwujemy, że zachowanie $\widehat{\kappa}_t$ zmienia się dość dynamicznie dla lat 1980–1991, a po roku 1991 wartość ta maleje, jak dla wspomnianych wcześniej populacji. Wartości $\widehat{\kappa}_t$ w przypadku Stanów Zjednoczonych również maleją, tak jak i dla Chile, jednakże w tym ostatnim przypadku obserwujemy pewne zaburzenia widoczne w latach 2006–2010.

Wyestymowane wartości $\widehat{\alpha}_x, \widehat{\beta}_x$ przydadzą się nam do odtworzenia wielkości $\log \widehat{m}_x(t)$ dla prognoz, których dokonamy w dalszej części pracy. Na ten moment powyższe analizy związane z tymi dwoma parametrami w zupełności nam wystarczą. To, na czym teraz skupimy naszą uwagę, to badanie własności estymatora $\widehat{\kappa}_t$, który odgrywa kluczową rolę w prognozie przyszłej śmiertelności.

Wykres 2: Wartości estymatora $\hat{\alpha}_x$ uzyskane dla poszczególnych państw.



Wykres 3: Wartości estymatora $\hat{\beta}_x$ uzyskane dla poszczególnych państw.



Wykres 4: Wartości estymatora $\hat{\kappa}_t$ uzyskane dla poszczególnych państw.

Rozdział 2

Parametr κ_t jako szereg czasowy

Zgodnie z założeniami modelu Lee-Cartera, które przedstawione zostały w poprzednim rozdziale, do modelowania zachowania parametru κ_t na przestrzeni lat kalendarzowych t wykorzystamy analizę szeregów czasowych. W tym rozdziale zapoznamy się z podstawowymi pojęciami, które pozwolą nam dopasować proces adekwatny do rozważanych danych. Przyjrzymy się procedurze doboru modelu i zaaplikujemy go do analizowanych populacji. W tym celu konieczne będzie zapoznanie się z metodami identyfikacji procesu oraz przedstawienie modelu $ARMA(p, q)$, który pozwoli nam zrozumieć proces $ARIMA(p, d, q)$. Skupimy się również na prognozie przyszłych wartości κ_t w oparciu o uzyskane estymatory $\widehat{\kappa}_t$, dzięki której będziemy mogli opisać zmiany śmiertelności w perspektywie najbliższych lat.

2.1 Szeregi czasowe - wprowadzenie

Jak zostało to zaproponowane przez autorów modelu L-C, prognoza wartości $\widehat{\kappa}_t$ zakłada, że obserwowane wartości tego estymatora są realizacją szeregu czasowego.

Jako szereg czasowy rozumiemy zestaw obserwacji x_1, x_2, \dots, x_n dokonywanych w równych odstępach czasu. Formalnie definiujemy go w poniższy sposób.

Definicja 2.1 (Szereg czasowy)

Szeregiem czasowym nazywamy proces stochastyczny, którym jest rodzina zmiennych losowych jednowymiarowych lub wielowymiarowych, określonych na tej samej przestrzeni probabilistycznej, indeksowanych parametrem czasowym t , który przebiega pewien zbiór T , $T \subseteq \mathbb{R}$. Stosujemy oznaczenie $\{X_t : t \in T\}$ lub krótko $\{X_t\}$.

Naszym rozważaniom poddamy analizę zachowania estymatora $\widehat{\kappa}_t$, którego wartość zmienia się w zależności od roku kalendarzowego t . Mamy zatem do czynienia z *dyskretnym szeregiem czasowym*, gdyż pomiaru wartości dokonujemy co roku.

Jak przedstawiono na wykresie 4 wartość estymatora $\widehat{\kappa}_t$ stopniowo maleje na przestrzeni lat. Ze względu na fakt, iż dysponujemy jedną obserwacją dla każdego roku kalendarzowego, nie oczekujemy by wartość $\widehat{\kappa}_t$ ulegała sezonowym zmianom, co widoczne jest na wspomnianym wykresie. Obserwujemy więc liniowy trend (zwany dryfem), o charakterze malejącym i brak widocznej sezonowości zjawiska. Możemy więc przypuszczać, iż rozważany przez nas model addytywny pozbawiony jest funkcji sezonowej i dany jest wzorem:

$$X_t = m_t + e_t, \quad t \in T,$$

gdzie:

- m_t to deterministyczna funkcja czasu, która opisuje trend zjawiska, tzw. *funkcja trendu*,
- $\{e_t\}$ jest procesem stacjonarnym, opisującym losowe odchylenia zjawiska od składowych trendu i sezonowości, tzw. *fluktuacja losowa*.

Zanim jednak dopasujemy odpowiedni model zapoznamy się z charakterystykami, które pomogą nam opisać jego naturę. Jedną z kluczowych kwestii jest rozstrzygnięcie zależności występujących pomiędzy obserwowanymi wartościami. Do zbadania wpływu poprzednich obserwacji na te uzyskiwane obecnie oraz zależności pomiędzy nimi występujących posłużymy się funkcjami autokowariancji i autokorelacji.

Definicja 2.2 (Funkcja autokowariancji)

Funkcję autokowariancji dla procesu stochastycznego $\{X_t : t \in \mathbf{Z}\}$ definiujemy jako

$$\gamma(r, s) = \text{Cov}(X_r, X_s) = \mathbb{E}(X_r - \mathbb{E}X_r)(X_s - \mathbb{E}X_s).$$

Zdefiniowana wyżej funkcja autokowariancji ściśle związana jest ze stacjonarnością szeregu czasowego.

Definicja 2.3 (Stacjonarność)

Szereg czasowy $\{X_t\}$ jest stacjonarny w szerszym sensie (stacjonarny), jeśli:

- $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$ dla wszystkich $t \in \mathbf{Z}$,
- $\mathbb{E}X_t \equiv \mu$ dla wszystkich $t \in \mathbf{Z}$, $\mu = \text{const}$,
- $\gamma(r + t, s + t) = \gamma(r - s)$ dla wszystkich $r, s, t \in \mathbf{Z}$, gdzie $\gamma(r, s)$ jest funkcją autokowariancji procesu stacjonarnego.

Przyjmujemy wtedy definicję:

$$\gamma(h) = \gamma(0, h), \quad \text{dla } h \in \mathbf{Z}.$$

Funkcję $\gamma(h)$, $h \in \mathbf{Z}$ nazywamy funkcją autokowariancji procesu stacjonarnego $\{X_t\}$, gdzie $\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})$ dla każdego $t \in T$.

Przykładem procesu stacjonarnego w szerszym sensie jest proces białego szumu, który stanowi elementarną cegiełkę do budowy procesów stacjonarnych w szerszym sensie oraz procesów niestacjonarnych. Zostanie on przez nas wykorzystany w dalszej części do modelowania zachowania estymatora $\widehat{\kappa}_t$.

Definicja 2.4 (Biały szum)

Ciąg $\{Z_t : t \in \mathbf{Z}\}$ nieskorelowanych zmiennych losowych o tej samej wartości oczekiwanej $\mu = \mathbb{E}Z_t$ i tej samej wariancji $\sigma^2 = \mathbb{E}(Z_t - \mathbb{E}Z_t)^2$ jest procesem stacjonarnym w szerszym sensie, nazywanym białym szumem i oznaczanym przez $\{Z_t\} \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Zauważmy, że szeregi przedstawione na wykresie 4 nie są szeregami stacjonarnymi ze względu na obserwowany w każdym przypadku trend. Aby uzyskać szereg stacjonarny skupimy się zatem na usunięciu trendu. W tym celu stosować będziemy operator różnicowania.

Definicja 2.5 (Operatory cofnięcia i różnicowania)

Operatory cofnięcia B i różnicowania ∇ działające na $\{x_t\}$ definiujemy jako

$$Bx_t = x_{t-1} \quad \text{oraz} \quad \nabla x_t = x_t - x_{t-1}.$$

W naszych analizach skupimy się jeszcze na badaniu stopnia zależności pomiędzy elementami stacjonarnego szeregu czasowego. Posłuży nam do tego wspomniana już funkcja autokorelacji.

Definicja 2.6 (Funkcja autokorelacji stacjonarnego szeregu czasowego)

Dla procesu $\{X_t\}$ stacjonarnego w szerszym sensie funkcję autokorelacji $\rho(h)$ definiujemy jako

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}, \quad h \in \mathbf{Z}.$$

Zanim przejdziemy do modelowania zachowania estymatora $\widehat{\kappa}_t$ spróbujemy znaleźć strukturę stochastyczną procesu opisującego badane przez nas zjawisko. Estymację procesu oprzemy na estymacji charakterystyk tego procesu w oparciu o charakterystyki próbkowe realizacji x_1, x_2, \dots, x_n pochodzące z procesu. Charakterystykami tymi są: średnia próbkowa, kowariancja próbkowa i korelacja próbkowa.

Definicja 2.7 (Średnia próbkowa)

Średnia próbkowa $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ realizacji x_1, x_2, \dots, x_n ze stacjonarnego szeregu czasowego $\{X_t\}$ jest realizacją statystyki \bar{X} zdefiniowanej przez

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j.$$

Statystyka ta jest estymatorem nieobciążonym średniej μ , stacjonarnego szeregu czasowego $\{X_t\}$. Do estymacji funkcji autokowariancji procesu stacjonarnego korzystać będziemy z estymatora $\hat{\gamma}(h)$.

Definicja 2.8 (Autokowariancja próbkowa, autokorelacja próbkowa)

Kowariancję próbkową realizacji x_1, x_2, \dots, x_n oznaczaną przez $\hat{\gamma}(h)$ rozumiemy jako:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-h} (x_i - \bar{x})(x_{i+h} - \bar{x}) \quad \text{dla } 0 \leq h < n$$

oraz

$$\hat{\gamma}(h) = \hat{\gamma}(-h) \quad \text{dla } -n < h \leq 0.$$

Korelację próbkową realizacji x_1, x_2, \dots, x_n oznaczaną przez $\hat{\rho}(h)$ definiujemy jako:

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}, \quad \text{dla } |h| < n.$$

Funkcja autokorelacji odgrywa ważną rolę przy wyborze modelu. Może być ona użyta jako wskaźnik niestacjonarności i okresowości szeregu czasowego. Analiza zachowania tej funkcji dostarcza przydatnych informacji. Na przykład, powolny spadek funkcji autokorelacji obserwowany wraz ze wzrostem opóźnienia h wskazuje na istnienie trendu.

Poza opisanymi wyżej trzema charakterystykami próbkowymi ważną rolę odgrywa również analiza zachowania funkcji autokorelacji cząstkowej.

Definicja 2.9 (Funkcja autokorelacji cząstkowej)

Funkcja $\alpha(h)$ jest autokorelacją cząstkową dla stacjonarnego procesu $\{X_t\}$, jeśli

$$\alpha(0) = 1, \quad \alpha(h) = \phi_{h,h}, \quad h \geq 1,$$

gdzie $\phi_h = (\phi_{h,1}, \phi_{h,2}, \dots, \phi_{h,h})^T$ spełnia równanie:

$$P(X_{h+1}|X_h, X_{h-1}, \dots, X_1) = \phi_{h,1}X_h + \phi_{h,2}X_{h-1} + \dots + \phi_{h,h}X_1$$

będące prognozą liniową procesu $\{X_t\}$.

Przedstawione w tym podrozdziale elementy teorii szeregów czasowych stanowią podstawy, które wykorzystywać będziemy przy dopasowaniu procesu najlepiej modelującego badane przez nas zachowanie estymatora $\widehat{\kappa}_t$.

2.2 Dopasowanie

Dysponując elementarnymi pojęciami dotyczącymi charakteryzacji szeregów czasowych, spróbujemy teraz dopasować odpowiedni proces, który najlepiej opisuje zachowanie estymatora $\widehat{\kappa}_t$. Zgodnie z założeniami modelu Lee-Cartera pod rozważę weźmiemy proces $ARIMA(p, d, q)$, który oparty jest na procesie $ARMA(p, q)$.

Definicja 2.10 (Proces $ARMA(p, q)$)

Proces $\{X_t\}$ jest procesem autoregresji rzędu p i średniej ruchomej rzędu q , ze średnią 0 oznaczanym jako $ARMA(p, q)$, jeżeli jest stacjonarnym i wynikowym rozwiązaniem równania

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q}, \quad t \in \mathbf{Z},$$

gdzie $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, $\phi_i \in \mathbf{R}$, $\theta_i \in \mathbf{R}$ oraz wielomiany autoregresji i średniej ruchomej

$$\phi(s) = 1 - \phi_1 s - \dots - \phi_p s^p, \quad \theta(s) = 1 + \theta_1 s + \dots + \theta_q s^q$$

nie mają wspólnych pierwiastków. Przez wynikowość procesu $\{X_t\}$ względem białego szumu $\{Z_t\}$ rozumiemy fakt, iż X_t jest zmienną losową skorelowaną tylko z przeszłością białego szumu.

Wykorzystywany przez nas proces $ARIMA(p, d, q)$ jest pewnym uogólnieniem zdefiniowanego powyżej procesu $ARMA(p, q)$. Dodatkowy parametr d niesie informację dotyczącą różnicowania wyjściowego szeregu. Zatem proces $ARMA(p, q)$ jest procesem $ARIMA(p, 0, q)$.

Definicja 2.11 (Proces $ARIMA(p, d, q)$)

Proces $\{X_t\}$ jest procesem $ARIMA(p, d, q)$, $p, d, q \in \mathbf{Z}_+$, jeżeli proces $\nabla^d X_t$ będący d -krotnym zróżnicowaniem procesu $\{X_t\}$ jest procesem $ARMA(p, q)$.

Zanim przejdziemy do doboru procesu do rzeczywistych danych wprowadźmy jeszcze jedną definicję związaną z pożądanymi cechami naszego procesu. Oprócz własności stacjonarności i wynikowości, o których już wspominaliśmy, chcielibyśmy również, aby dopasowany proces był odwracalny.

Definicja 2.12 (Odwracalność)

Proces $\{X_t\}$ nazywamy odwracalnym względem białego szumu $\{Z_t\}$, jeżeli $\{Z_t\}$ można przedstawić jako liniową funkcję procesu $\{X_s, s \leq t\}$.

Doboru odpowiedniego modelu dla sześciu rozpatrywanych państw dokonamy wykorzystując metodologię Boxa-Jenkinsa, zgodnie z którą w naszej analizie wyróżniamy następujące etapy:

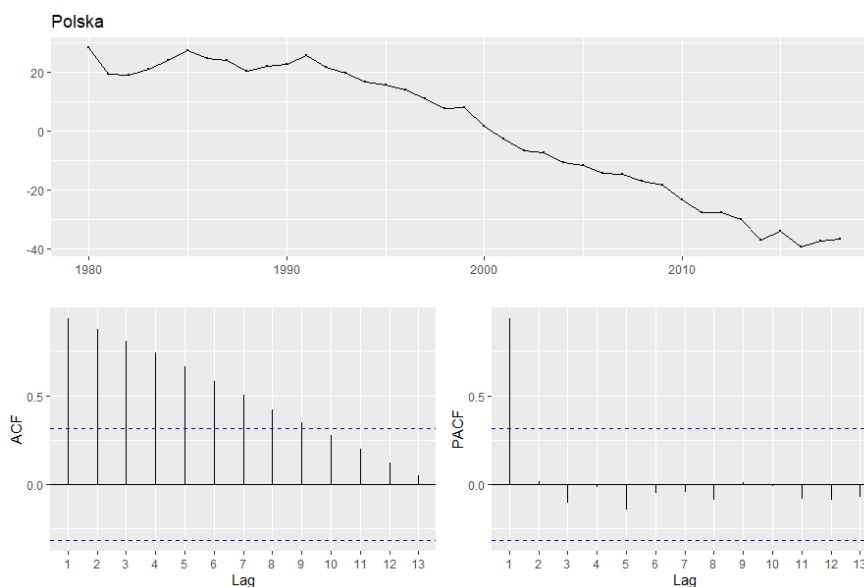
1. **Identyfikacja** - weryfikacja stacjonarności procesu, analiza wykresu wyjściowych danych, obserwacja wykresów autokorelacji i autokorelacji cząstkowej w celu dopasowania procesu adekwatnego do badanego zjawiska.
2. **Estymacja** - estymacja parametrów dobranego w poprzednim kroku modelu, porównanie potencjalnych modeli pod względem wybranego kryterium, np. kryterium *AIC* (*Akaike Information Criterion*).
3. **Statystyczna ocena modelu** - diagnostyka residuów - testy niezależności i normalności, weryfikacja spełnienia wymogów stacjonarności i odwracalności.

Opisaną powyżej procedurę zastosujemy dla: Polski, Stanów Zjednoczonych, Belgii, Japonii, Australii oraz Chile. W głównej części pracy zostanie ona dokładnie opisana na podstawie danych dotyczących Polski. Realizacja tego rozumowania dla pozostałych państw przedstawiona została w załączniku A niniejszej pracy.

2.2.1 Polska

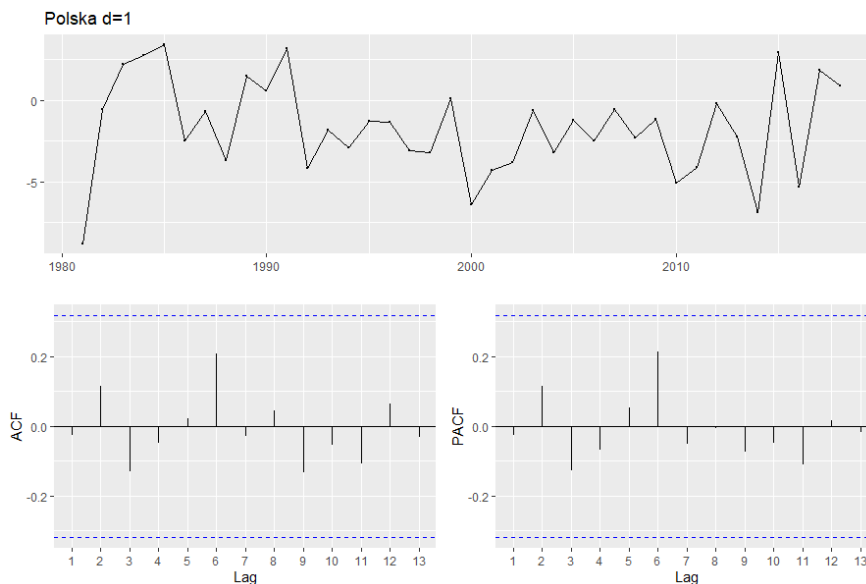
Dla danych dotyczących Polski dysponujemy wartościami estymatora $\widehat{\kappa}_t$ uzyskanymi w oparciu o lata kalendarzowe $t \in \{1980, 1981, \dots, 2018\}$ i wiek $x \in \{0, 1, 2, \dots, 104\}$. Do modelowania zachowania $\widehat{\kappa}_t$ wykorzystamy cały zbiór obserwacji.

Etap dopasowania modelu rozpoczniemy od analizy wykresów: wartości estymatora $\widehat{\kappa}_t$, autokorelacji oraz cząstkowej autokorelacji.



Wykres 5: Wartości estymatora $\widehat{\kappa}_t$ (górny panel), wykres autokorelacji (lewy dolny panel) oraz wykres autokorelacji cząstkowej (prawy dolny panel), na podstawie danych: Polska 1980-2018.

Na wykresie wartości $\widehat{\kappa}_t$ (górny panel wykresu 5) zauważamy, że do roku 1991 wartości parametru oscylowały wokół ustalonego poziomu, natomiast począwszy od roku 1991 wraz ze wzrostem roku kalendarzowego, wartość $\widehat{\kappa}_t$ maleje. Obserwujemy, omawiany już wcześniej, liniowy trend malejący (dryf). Nasz szereg nie jest więc stacjonarny. Potwierdzenie tego spostrzeżenia widoczne jest na wykresie funkcji autokorelacji, która maleje powoli ze wzrostem opóźnienia h , co świadczy o istnieniu trendu. Spójrzmy, jak zachowa się nasz szereg po zróżnicowaniu.



Wykres 6: Wartości estymatora $\widehat{\kappa}_t$ po zróżnicowaniu (górny panel), wykres autokorelacji (lewy dolny panel) oraz wykres autokorelacji cząstkowej (prawy dolny panel) na podstawie danych: Polska 1980-2018.

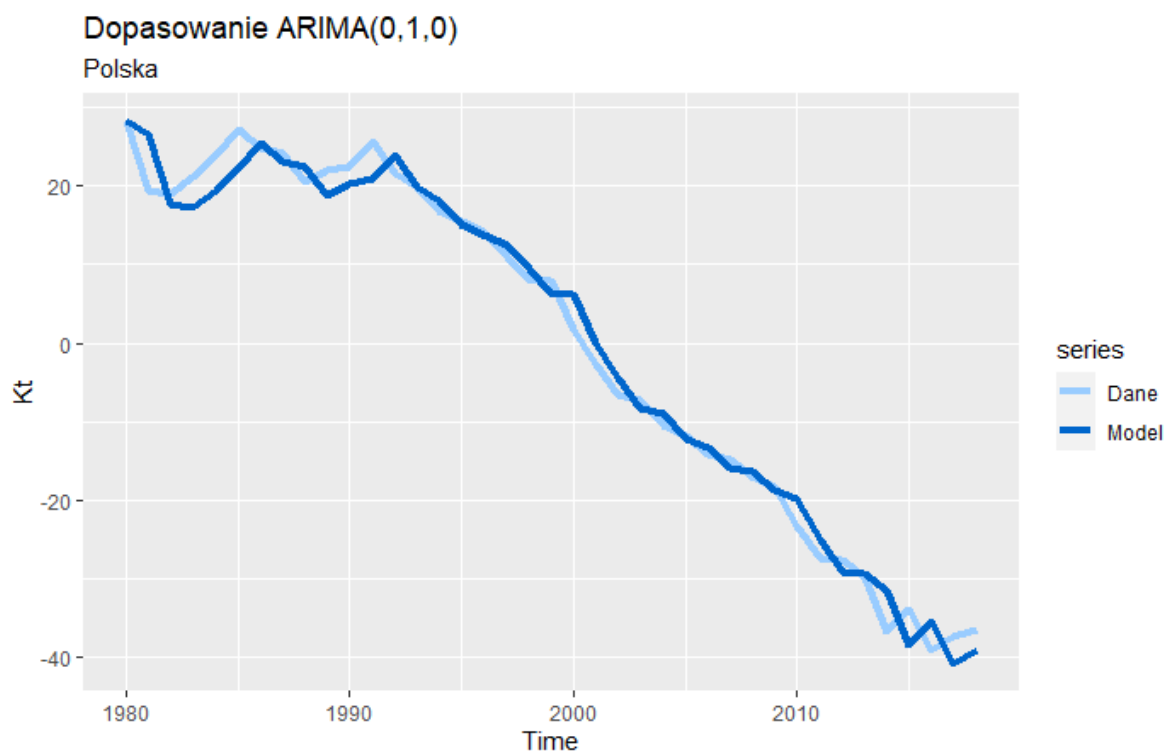
Możemy zauważyć, że dla danych po jednokrotnym zastosowaniu operatora różnicowania otrzymujemy szereg, który jest stacjonarny, stąd nie ma konieczności ponownego różnicowania i możemy przyjąć, iż parametr d jest równy 1. Uzyskana stacjonarność widoczna jest również na wykresie autokorelacji, która szybko maleje. Zauważamy również, że wartości ACF i PACF znajdują się w przedziale $\pm 1.96/\sqrt{n}$ dla wszystkich wartości h , skąd wnioskujemy, że rząd autoregresji $p = 0$ oraz rząd średniej ruchomej $q = 0$. Potencjalnym modelem dopasowanym do danych jest więc $ARIMA(0,1,0)$. Przeanalizujemy jeszcze, jak nasz model wypada pod względem wartości zmodyfikowanego kryterium **AIC**- $AICc$ na tle innych modeli. Kryterium $AICc$ stanowi modyfikację AIC dostosowaną do sytuacji, w której próbka jest mała.

	AICc
ARIMA (0,1,0)	192.3256
ARIMA (1,1,0)	194.6602
ARIMA (0,1,1)	194.6622

Tabela 2: Porównanie modeli $ARIMA(p,d,q)$ pod względem wartości $AICc$.

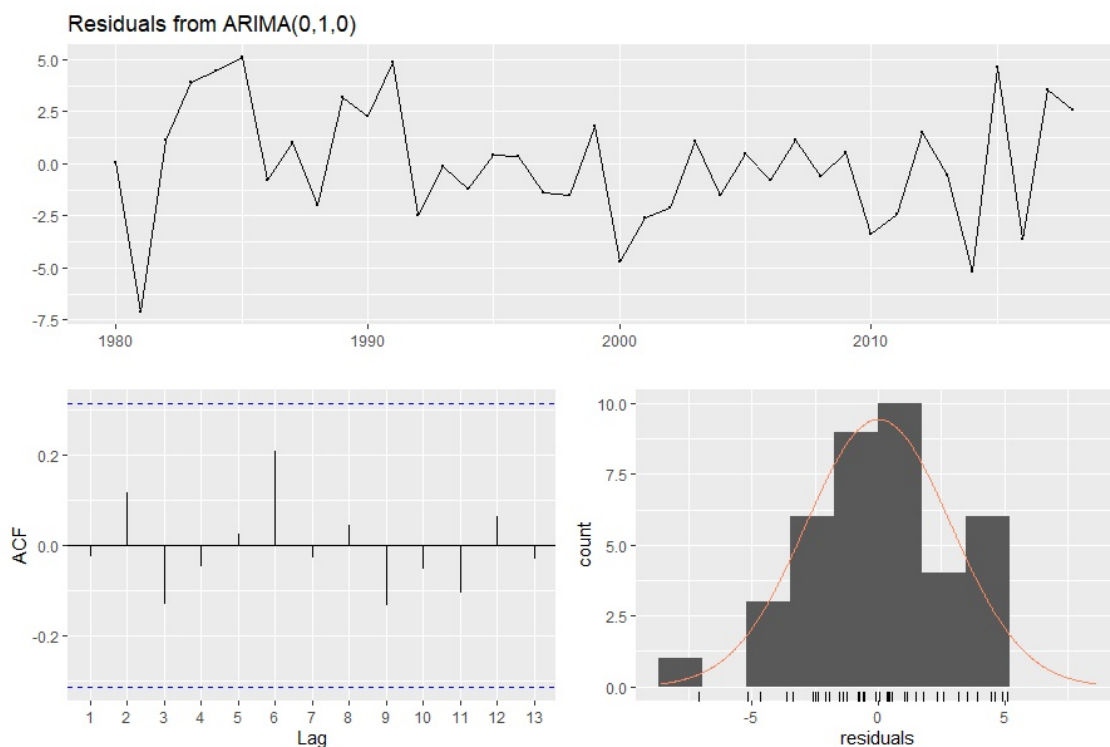
Najlepszy, pod względem kryterium $AICc$ okazuje się być faktycznie model $ARIMA(0,1,0)$, gdyż to właśnie on minimalizuje wartość tego kryterium. Oznacza to, że dla dalszych

analiz przyjmujemy właśnie ten model. Zatem jedyny parametr, który będziemy estymować to dryf. Wykorzystamy do tego metodę największej wiarygodności. Zobaczmy, jak wybrany przez nas proces dopasowuje się do rzeczywistych danych.



Wykres 7: Porównanie dopasowania procesu ARIMA(0,1,0) do rzeczywistych wartości, na podstawie danych: Polska 1980-2018.

Możemy zauważyć, że dopasowanie to jest satysfakcjonujące, model poprawnie oddaje kształt zmian wartości estymatora $\widehat{\kappa}_t$. Obserwujemy jednak delikatne przesunięcie wykresów do roku 1991. Przyczyną takiego zachowania mogą być zaburzenia w wartościach $\widehat{\kappa}_t$. Dla lat kalendarzowych 1980 – 1991 wartość estymatora stosunkowo często zmienia swoje zachowanie w porównaniu do zachowania obserwowanego po 1991 roku. Można pokusić się o podzielenie procesu na dwie osobne części. Pierwszy proces mógłby modelować zachowanie $\widehat{\kappa}_t$ do 1991 roku, a drugi po tym czasie. Jednako naszym celem jest próba prognozowania wartości tego estymatora, stąd dalsze rozważania oprzemy o dopasowanie procesu dla wszystkich danych. Zbadajmy jeszcze zachowanie residuów dla utworzonego modelu.



Wykres 8: Własności residuów dopasowanego modelu: wartości residuów (górny panel), funkcja autokorelacji (lewy dolny panel) oraz histogram wartości resztowych (prawy dolny panel), na podstawie danych: Polska 1980-2018.

Na wykresie zmian wartości residuów (górny panel wykresu 8) nie obserwujemy żadnych prawidłowości, zachowanie przedstawione na wykresie ma charakter losowy. Funkcja autokorelacji szybko maleje i przyjmuje wartości nie wykraczające poza $\pm 1.96/\sqrt{n}$. Histogram z naniesioną krzywą gęstości rozkładu normalnego sugeruje, iż dane mogą być przybliżane tym rozkładem. Powyższe wykresy wskazują więc na prawidłowe zachowanie residuów: stacjonarność, niezależność oraz normalność. Dodatkowo sprawdzić możemy, czy wartości resztowe faktycznie są realizacją białego szumu (w szczególności, czy mogą uchodzić za nieskorelowane), wykorzystując w tym celu test Ljung-Boxa. W teście tym zakładamy, że mamy do czynienia z procesem $IID(\mu, \sigma^2)$. Testować będziemy hipotezę:

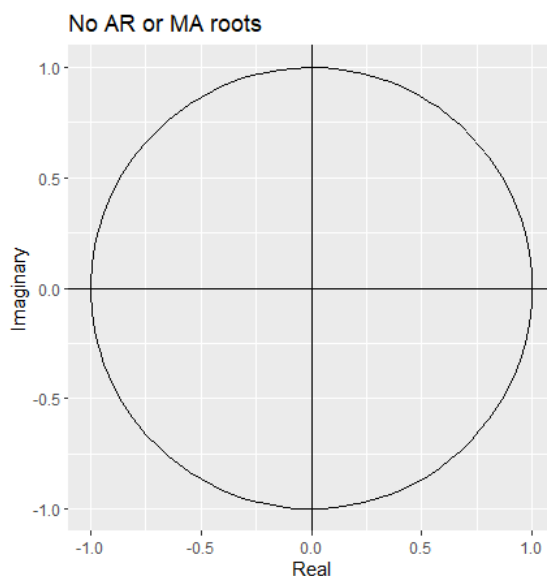
$$H_0 : \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(h) = 0 \quad \text{przeciwko} \quad H_1 : \rho(1) \neq 0 \vee \rho(2) \neq 0 \vee \dots \vee \rho(h) \neq 0$$

Statystyka testowa jest postaci:

$$T = n(n+2) \sum_{k=1}^h \frac{\rho^2(k)}{n-k}.$$

W rozważanym przez nas przypadku wartość statystyki testowej wynosi 3.7422. Jednakże wnioskowanie oprzemy na uzyskanej p -wartości, która wyniosła 0.8089 i jest znacząco większa od przyjętego poziomu istotności $\alpha = 0.05$. Oznacza to, że nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Wynika stąd, że residua w dopasowanym przez nas modelu wykazują poprawne własności i możemy przejść do dalszej weryfikacji.

Sprawdźmy jeszcze odwracalność i stacjonarność odpowiadającego procesu $ARMA(p,q)$, które ocenimy na podstawie położenia pierwiastków wielomianu autoregresji i średniej ruchomej względem okręgu jednostkowego.



Wykres 9: Pierwiastki wielomianów charakterystycznych autoregresji i średniej ruchomej, na podstawie danych: Polska 1980-2018.

W naszym przypadku nie mamy żadnych pierwiastków, gdyż wartości rzędu autoregresji i rzędu średniej ruchomej wynoszą 0. Odpowiadający proces $ARMA(p,q)$ jest zatem stacjonarny i odwracalny.

2.2.2 Pozostałe dopasowania

Tak, jak to zostało wspomniane, szczegółowy opis dopasowania modelu do danych dotyczących: Stanów Zjednoczonych, Belgii, Japonii, Australii oraz Chile zamieszczony został w załączniku A niniejszej pracy. W tym miejscu spójrzmy jednak na podsumowanie realizacji procesu doboru modelu, analizując optymalne modele wybrane dla każdego z państw.

	Optymalny proces
Polska	ARIMA (0,1,0)
Stany Zjednoczone	ARIMA (0,1,0)
Belgia	ARIMA (0,1,1)
Japonia	ARIMA (0,2,2)
Australia	ARIMA (0,1,1)
Chile	ARIMA (0,1,2)

Tabela 3: Optymalny wybór procesów dla poszczególnych państw.

Często uważa się, że proces $ARIMA(0,1,0)$ jest najodpowiedniejszym procesem w kontekście modelowania zmian $\widehat{\kappa}_t$. Otrzymane powyżej wyniki sugerują jednak, iż nie zawsze jest to najlepsze rozwiązanie. W naszych analizach proces ten okazał się być najlepszym modelem w przypadku Polski i Stanów Zjednoczonych. Zgodnie z klasycznym rozumowaniem, najmniej oczywisty wydaje się być proces wybrany dla Japonii, jednakże, jak przedstawiono na wykresie 24 bardzo dobrze oddaje on rzeczywiste zachowanie badanego parametru.

2.3 Prognozy

Mając na uwadze dopasowania procesów, których dokonaliśmy w poprzedniej części, przystąpimy teraz do najważniejszego etapu naszych analiz, czyli do prognozy wartości estymatora $\widehat{\kappa}_t$. To właśnie odpowiednie prognozy odgrywają kluczową rolę w rozważanym przez nas problemie, gdyż dostarczają one informacji o przyszłości, którą z pewnym zaufaniem do wyniku, chcielibyśmy modelować. Na ich podstawie możemy opisywać potencjalne zachowania wskaźników, takich jak: $sp_x(t)$, $sq_x(t)$, natężenie zgonów, wartość oczekiwana przyszłego czasu życia dla danego x -latka czy odtworzyć wielkość składki ubezpieczeniowej. Zanim jednak przystąpimy do prognozowania wartości dla konkretnych danych, skupimy się na teorii towarzyszącej temu zagadnieniu.

Prognoza wartości X_{n+h} , $h > 0$ stacjonarnego procesu X_n ze średnią μ i funkcją autokowariancji γ w oparciu o zestaw wartości $\{X_n, X_{n-1}, \dots, X_1\}$ sprowadza się do znalezienia kombinacji liniowej $1, X_n, X_{n-1}, \dots, X_1$ opisującej X_{n+h} , która minimalizuje błąd średniokwadratowy [14].

Definicja 2.13 (Optymalna prognoza liniowa)

Optymalna prognoza liniowa X_{n+h} względem $1, X_n, X_{n-1}, \dots, X_1$ oznaczana przez $P(X_{n+h}|1, X_n, X_{n-1}, \dots, X_1)$ jest równa

$$P(X_{n+h}|1, X_n, X_{n-1}, \dots, X_1) = a_0 + \sum_{j=1}^n b_{n,j} X_{n+1-j},$$

gdzie a_0 oraz $b_{n,j}$ spełniają poniższy warunek

$$\mathbb{E}(X_{n+h} - a_0 - \sum_{j=1}^n b_{n,j} X_{n+1-j})^2 = \inf_{a,b_j} \mathbb{E}(X_{n+h} - a - \sum_{j=1}^n b_j X_{n+1-j})^2.$$

Prognozy przeprowadzimy zgodnie ze szczegółowym opisem tej procedury dla procesu $ARIMA(p,d,q)$ zawartym w pracach [3; 4; 14]. Do estymacji parametrów wykorzystamy Algorytm Innowacyjny, w którym prognoza w chwili następnej rozumiana jest jako regresja na zaobserwowane w przeszłości błędy prognoz [14].

Jak już to zostało wspomniane, nasze analizy zmierzają do badania zachowania wskaźników uzyskanych dla rozważanych państw z wykorzystaniem efektów otrzymanych prognoz. Stąd naszą uwagę skupimy bardziej na konsekwencjach wynikających z otrzymanych przewidywań niż na samym opisie prognozy, którego szczegóły znajdziemy w dostępnej literaturze [3; 4].

Rozdział 3

Co przyniesie przyszłość

Dysponując prognozami estymatora $\widehat{\kappa}_t$ dla każdego z rozważanych państw, jesteśmy w stanie poczynić pewne wnioski dotyczące przyszłego zachowania wybranych wskaźników charakteryzujących długość życia. Przede wszystkim, w oparciu o prognozowane wartości $\widehat{\kappa}_t$, możemy rozszerzyć macierz $\log \widehat{M}$ o dodatkowe kolumny, wykorzystując przy tym założenie modelu Lee-Cartera (1.4). Z początkowych estymacji uzyskaliśmy wartości $\widehat{\alpha}_x$ oraz $\widehat{\beta}_x$, które nie zależą od roku kalendarzowego t a jedynie wieku x . Natomiast prognozy przeprowadzone w poprzednim rozdziale dostarczają nam informacji o zmianach $\widehat{\kappa}_t$. Rozszerzenie macierzy $\log \widehat{M}$ stanowi podstawę do dalszego wnioskowania.

Jak to już zostało wspomniane, jednym ze wskaźników opisujących długość trwania ludzkiego życia jest *średnia przyszłego czasu życia*. W tym miejscu skupimy się na badaniu zachowania tej wielkości w oparciu o rezultaty poczynionych estymacji i prognoz. Jest to pewna modyfikacja wielkości przedstawionej w rozdziale 1, bowiem zamiast wyliczenia owej wartości w oparciu o rozkład T_x , chcielibyśmy uwzględnić wpływ przyszłości. Choć początkowo brzmi to dość abstrakcyjnie, to po krótkim namyśle jest to racjonalne podejście do rozważanego przypadku. Wyobraźmy sobie, że chcemy obliczyć średnią przyszłego czasu życia 30-latka w bieżącym roku. To, ile lat przeżyje jeszcze ta osoba zależy od charakterystyki czasu trwania życia 30-latka w bieżącym roku, 31-latka w roku następnym, 32-latka za dwa lata itd. Widzimy zatem, że rozsądnym jest by ocena średniego przyszłego czasu życia danego x -latka oparta była na prognozie przyszłych wartości.

Średnią liczbę lat, które pozostały do przeżycia osobie w wieku x liczoną w roku kalendarzowym t w opisany powyżej sposób oznaczamy będziemy przez $e_x^\nearrow(t)$. Na mocy równości (1.1) oraz (1.3) wielkość tę opisuje poniższa formuła

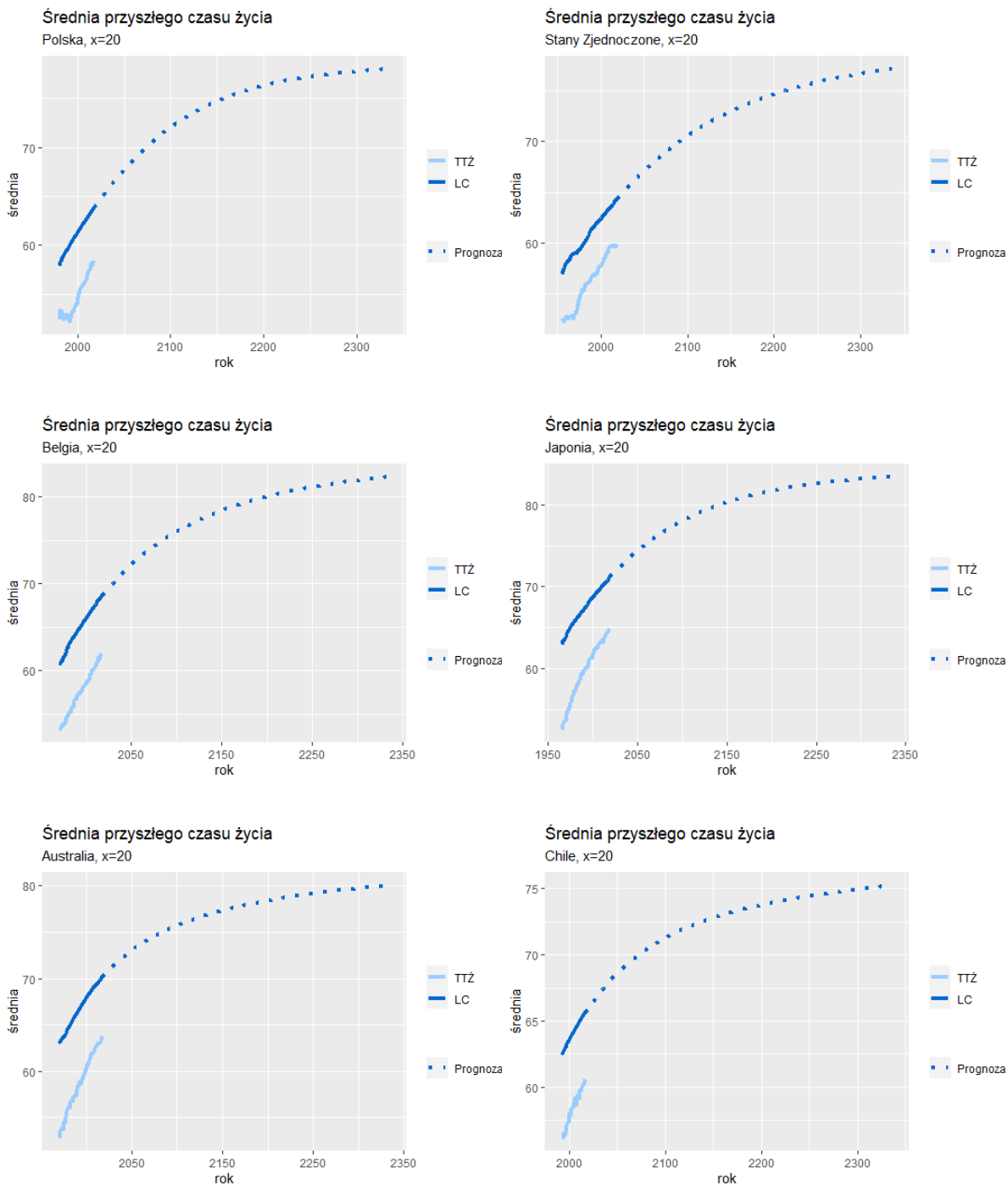
$$\begin{aligned} e_x^\nearrow(t) &= \int_{\xi \geq 0} \exp\left(-\int_0^\xi \mu_{x+\eta}(t+\eta) d\eta\right) d\xi \\ &= \frac{1 - \exp(-\mu_x(t))}{\mu_x(t)} \\ &+ \sum_{k \geq 1} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \exp(-\mu_{x+j}(t+j)) \right) \frac{1 - \exp(-\mu_{x+k}(t+k))}{\mu_{x+k}(t+k)}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dokonując wyliczeń w miejsce wartości $\mu_x(t)$ podstawiamy będziemy estymatory uzyskane zgodnie z założeniem modelu Lee-Cartera (1.4) oraz prognozy otrzymane dzięki predykcji szeregów czasowych.

Rozważmy teraz $x \in \{20, 60, 80\}$. Dla każdego z sześciu analizowanych krajów prześledzimy zmiany średniej przyszłego czasu trwania dla trzech wybranych x -latków. Wyniki uzyskane w oparciu o rachunki przeprowadzone zgodnie z zależnością (3.1) porównamy z wartościami zamieszczonymi w tablicach trwania życia (TTŻ), które nie uwzględniają wpływu przyszłej sytuacji. Na poniższych wykresach błękitna krzywa oddaje zmiany wartości zamieszczonych w TTŻ w kolejnych latach kalendarzowych t . Natomiast ciągła granatowa krzywa przedstawia wartości otrzymane w oparciu o założenia modelu L-C i wyliczenia zgodne z formułą (3.1). Nieciągłe przedłużenie tej krzywej charakteryzuje oczekiwane zachowanie, biorące pod uwagę uzyskane predykcje.

Rozważmy kolejne sytuacje, rozpoczynając od charakterystyki zmian średniej długości trwania życia dla 20-latka zamieszczonych na wykresie 10. Widzimy, że wartości uzyskane w oparciu o przeprowadzone analizy i uwzględniające poczynione prognozy różnią się od tych zamieszczonych w tablicach trwania życia. Oznacza to, że w sytuacji, w której wartość składki ubezpieczeniowej kalkulowana jest w oparciu o tablice trwania życia, ubezpieczyciel narażony jest na poniesienie strat. Wynika to z faktu, iż nie doszacowuje on kosztów, gdyż założona przez niego długość trwania życia ubezpieczonego jest mniejsza niż ta, której faktycznie należy się spodziewać. W oparciu o prognozy przedstawione na wykresie 10 powinniśmy oczekiwać, że obecny wzrost długości trwania życia będzie obserwowany w perspektywie najbliższych lat. Widzimy, że niezależnie od rozważanego kraju, zachowanie badanej cechy jest zbliżone, gdyż granatowe krzywe zachowują się podobnie. Nakreślają one pewien ogólny kształt, a każda z nich wydaje się być szczególną postacią bazowej krzywej. Widoczne różnice w tempie przyrostu średniej zależą od wartości, od której rozpoczynamy nasze prognozy. Ilustracją tej zależności jest porównanie wykresów uzyskanych dla Polski i Japonii. Wartości prognozy dla Polski rozpoczynają się od średniej równej około 65 lat i obserwowany wzrost jest szybki. Natomiast dla danych dotyczących Japonii średnia, od której rozpoczynamy wynosi około 71 lat i widoczny wzrost wartości nie jest tak dynamiczny jak w przypadku Polski. Zauważmy, że w okolicach roku 2100 sytuacja w Polsce będzie zbliżona do tego, co obserwujemy teraz w Japonii. Kształt zmian, którego spodziewamy się dla Polski po 2100 roku jest tym, czego oczekujemy dla Japonii w najbliższych latach. Możemy więc myśleć, że w kontekście zmian średniej przyszłego czasu życia sytuacja obserwowana w Japonii jest wizją tego, co czeka nas w Polsce za 100 lat. Analiza wykresu 10 pozwala nam orzec, że podobne własności charakteryzują zmiany średniej przyszłego czasu życia w Polsce, Stanach Zjednoczonych i Belgii oraz Japonii, Australii i Chile.

Zestawiając wszystkie wykresy widzimy, że kształt zmian średniej przyszłego czasu życia jest zbliżony i oczekiwać możemy, że po roku 2300 sytuacja dotycząca badanej cechy zacznie ulegać stabilizacji. Kolejne wartości średniej będą się niewiele różnić, a ich graniczna wartość determinowana jest przez etap wzrostu, który obecnie notujemy. Oznacza to, że możemy oczekiwać, iż istnieje wiek graniczny, którego dożywa człowiek.

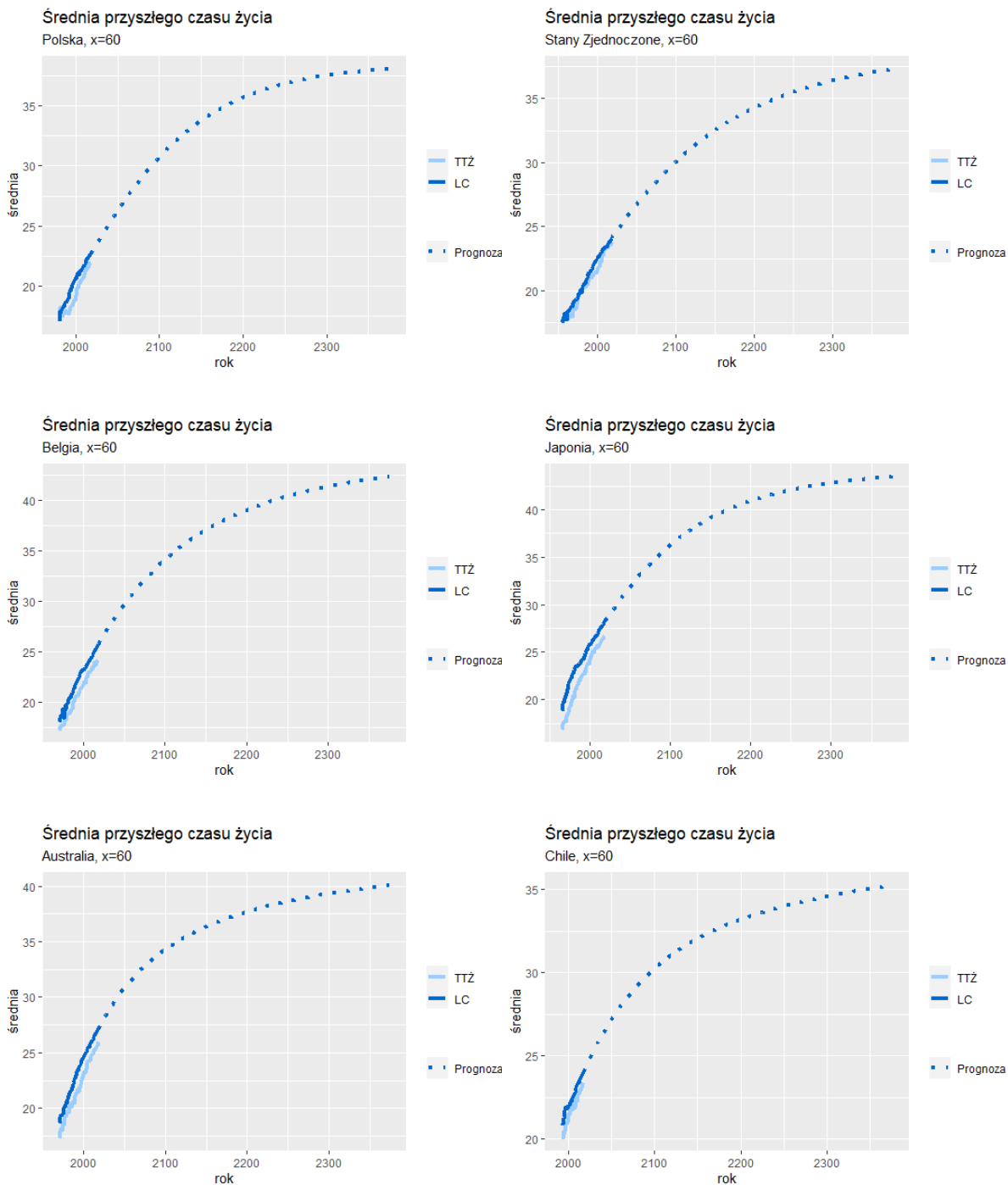


Wykres 10: Zmiany średniej długości czasu życia 20-latką na przełomie lat uzyskane dla poszczególnych państw.

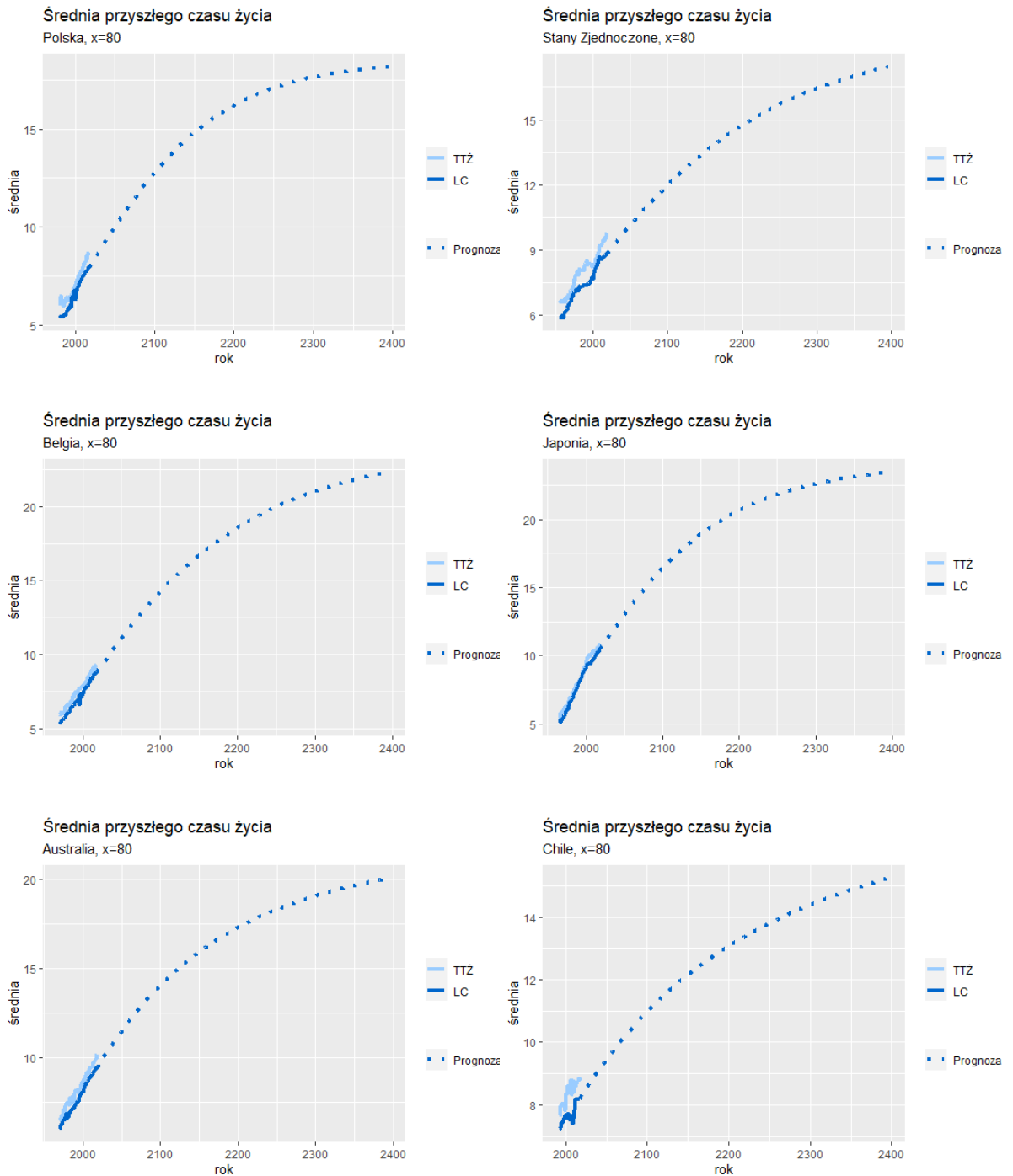
Spójrzmy teraz na zmiany średniej długości życia obserwowane dla 60-latków. Przedstawione na wykresie 11 zachowania średniej przyszłego czasu życia charakteryzują się większą dynamiką niż te widoczne na wykresie 10. W rozważanym poprzednio przypadku obserwowaliśmy stabilizację wzrostu po roku 2300. Analizując średnią przyszłego czasu życia dla 60-latka, oczekujemy, że stabilizacja zmian osiągnięta będzie dużo później. W tym przypadku różnice pomiędzy wartościami zamieszczonymi w TTŻ a rezultatami osiągniętymi z wykorzystaniem formuły (3.1) nie są tak znaczące jak dla $x = 20$. Podobnie, jak poprzednio, zmiany prezentowane dla każdego z rozpatrywanych państw są pewnym szczególnym przypadkiem bazowej krzywej nakreślającej ogólny kształt. Ponownie dostrzegamy podobieństwa pomiędzy wybranymi populacjami, choć tym razem nie są one tak oczywiste. Zauważmy, że wyjściowa wartość średniej dla Chile jest nieco wyższa niż ta obserwowana w Polsce, natomiast spodziewamy się, że graniczna wartość średniej przewidywana dla Polski będzie wyższa niż ta prognozowana dla Chile. Podobnie dla Belgii i Australii. Na podstawie wykresu 11 sądzić możemy, iż najwyższy wiek graniczny osiągną mieszkańcy Japonii. Po raz kolejny mamy podstawy by sądzić, że obserwowany obecnie wzrost ma swój koniec.

Przeanalizujmy jeszcze, jak prezentuje się sytuacja dla $x = 80$. Na wykresie 12 dostrzegamy, iż tak jak dla $x = 60$ różnice pomiędzy wartościami zamieszczonymi w tablicach trwania życia a wynikami uzyskanymi przez nas zgodnie ze wzorem (3.1) są niewielkie. Możemy zauważyć, że tak, jak w dwóch poprzednio analizowanych przypadkach, zmiany widoczne dla każdego z państw są pewnym szczególnym przypadkiem bazowej krzywej opisującej zmiany średniej przyszłego czasu życia. Oczekujemy, iż obserwowana poprzednio stabilizacja osiągnięta zostanie tym razem znacznie później.

Poczynione powyżej obserwacje są podstawą do wnioskowania dotyczącego przyszłości, jednakże nie informują nas o dalszych trendach w jednoznaczny sposób. Analiza wykresu 10 wskazywała na istnienie wieku granicznego i określała moment stabilizacji wzrostu średniej przyszłego czasu życia. Natomiast wraz ze wzrostem rozważanego x sytuacja przestaje być tak klarowna. Oczekujemy, że średnia przyszłego czasu życia dla $x = 60$ również osiągnie pewne ograniczenie, chociaż znacznie później niż dla $x = 20$. Natomiast w przypadku, gdy $x = 80$ stabilizacja nie była widoczna w rozważanej przez nas perspektywie czasu. Widzimy zatem, że im większy wiek x , tym później oczekujemy stabilizacji wzrostu średniej przyszłego czasu życia. Z jednej strony może to świadczyć o pewnym ograniczeniu, które prędzej czy później zostanie osiągnięte. Z drugiej zaś $x = 80$ to skrajny przypadek w obecnym czasie, uzyskany w oparciu o dane, którymi teraz dysponujemy. Wraz z faktycznym wzrostem długości życia zwiększy się zakres dostępnych obserwacji i w konsekwencji skrajnym wyborem może stać się $x = 90$, czy $x = 100$. Patrząc przez pryzmat poczynionych analiz możemy sądzić, iż stabilizacja średniej dla dwóch wymienionych wyżej sytuacji dokona się jeszcze później niż dla $x = 80$. Rozumowanie to może być kontynuowane dla coraz to większych x , dlatego na dzień dzisiejszy nie możemy wykluczyć żadnego z rozpatrywanych scenariuszy.



Wykres 11: Zmiany średniej długości czasu życia 60-lątka na przełomie lat uzyskane dla poszczególnych państw.



Wykres 12: Zmiany średniej długości czasu życia 80-latka na przełomie lat uzyskane dla poszczególnych państw.

Podsumowanie

Analizy przeprowadzone w niniejszej pracy prowadzą nas do kilku konkluzji związanych z przedmiotem naszych rozważań. Fundamentalną kwestią jest zdanie sobie sprawy z rangi problemu, z jakim mierzą się współcześni aktuariusze. Jak mieliśmy okazję się przekonać, próba opisania stale zmieniającej się śmiertelności stanowi nie lada wyzwanie.

Przedstawione w pracy wyniki pokazały nam, że pomiędzy wszystkimi sześcioma krajami istnieją pewne podobieństwa. W konsekwencji oznacza to, że położenie geograficzne czy nawet czynniki ekonomiczno-gospodarcze nie są naczelnymi przesłankami determinującymi trend zmian natężenia śmiertelności.

Otrzymane prognozy pozwalają nam stwierdzić, iż wzrost długości trwania ludzkiego życia nie jest problemem jedynie dnia dzisiejszego. Trend ten utrzymawać się będzie w perspektywie najbliższych lat. Nie możemy jednak jasno stwierdzić, czy i kiedy ma on swój koniec.

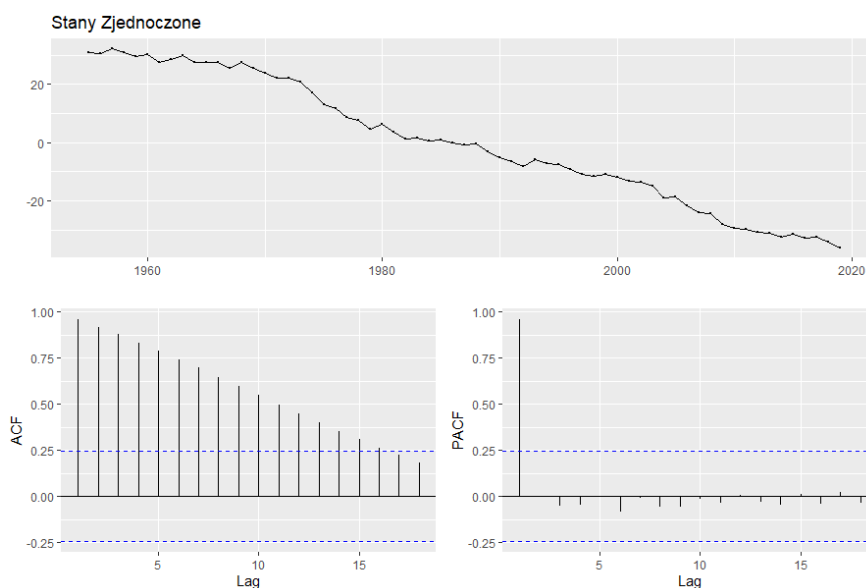
Świadomość problemu i znajomość zaprezentowanych dotychczas metod stanowią dobre podstawy do znalezienia optymalnego rozwiązania. Warto jednak pamiętać, że rzeczywistość krytycznie zweryfikuje nawet najlepszy model.

Załącznik A

Poniżej przedstawione zostało rozumowanie, prowadzące do znalezienia optymalnego procesu opisującego zachowanie estymatora $\widehat{\kappa}_t$ dla: Stanów Zjednoczonych, Belgii, Japonii, Australii i Chile.

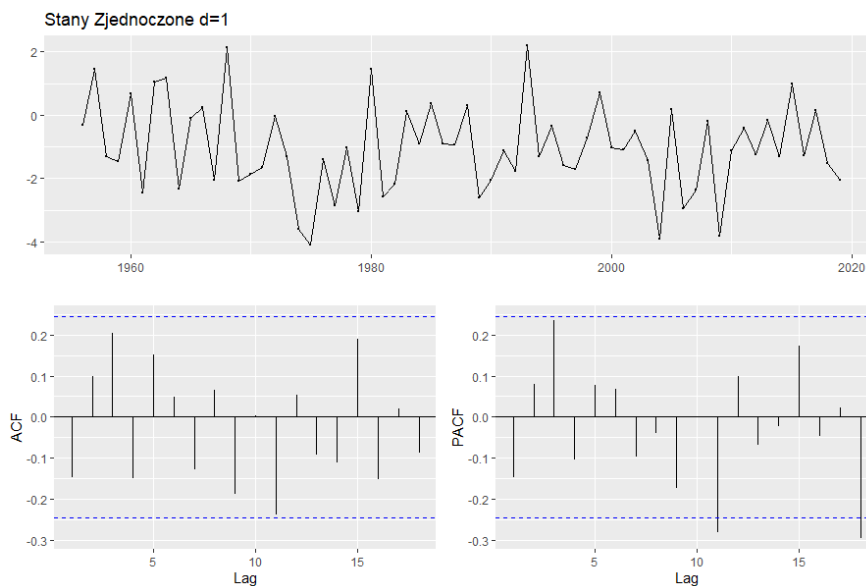
Stany Zjednoczone

W przypadku Stanów Zjednoczonych dysponujemy wartościami estymatora $\widehat{\kappa}_t$ uzyskanymi na podstawie lat kalendarzowych $t \in \{1955, 1956, \dots, 2019\}$ i wieku $x \in \{0, 1, \dots, 110\}$. Procedurę dopasowania modelu do danych rozpoczniemy, jak zwykle, od analizy wykresów: zmian wartości $\widehat{\kappa}_t$, funkcji autokorelacji i funkcji autokorelacji cząstkowej.



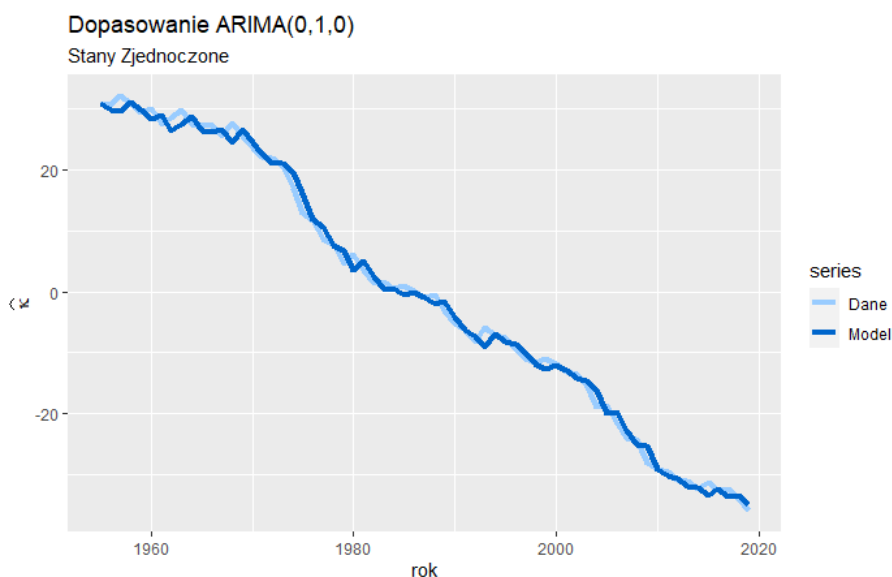
Wykres 13: Wartości estymatora $\widehat{\kappa}_t$ (górny panel), wykres autokorelacji (lewy dolny panel) oraz wykres autokorelacji cząstkowej (prawy dolny panel), na podstawie danych: Stany Zjednoczone 1955-2019.

Możemy zauważyć, iż wartości $\widehat{\kappa}_t$ maleją na całym przedziale, który rozpatrujemy. Jednakże tempo spadku tychże wartości jest nieco inne w zależności od czasu. Na wykresie 13 dostrzegamy, że do roku 1972 spadek wartości jest mniejszy niż dla lat 1972-1980. Później od 1980 roku wartości maleją w zbliżonym tempie. Opisane własności sugerują, iż omawiany szereg nie jest stacjonarny. Widzimy to również na wykresie autokorelacji, która powoli maleje wraz ze wzrostem opóźnienia, co potwierdza istnienie trendu. W celu usunięcia widocznego trendu użyjemy operatora różnicowania. Spójrzmy zatem, jak prezentują się wartości szeregu po jednokrotnym zróżnicowaniu.



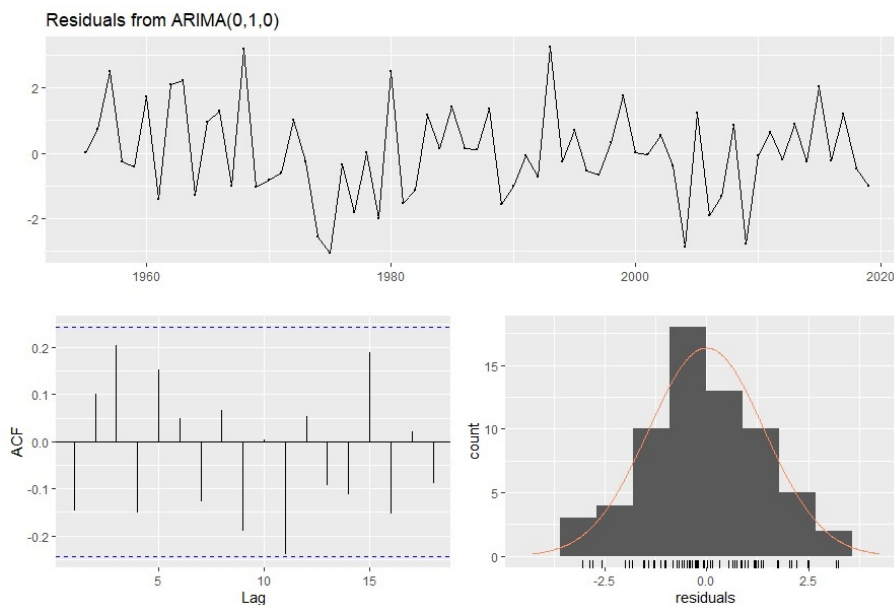
Wykres 14: Wartości estymatora $\widehat{\kappa}_t$ po zróżnicowaniu (górny panel), wykres autokorelacji (lewy dolny panel) oraz wykres autokorelacji cząstkowej (prawy dolny panel), na podstawie danych: Stany Zjednoczone 1955-2019.

Na wykresie 14 nie dostrzegamy widocznego uprzednio trendu, stąd możemy przyjąć, iż parametr d równa się 1. Analiza wykresów autokorelacji i autokorelacji cząstkowej dla zróżnicowanego szeregu wskazuje, iż możemy przypuszczać, że rząd autoregresji p jest równy 0 i rząd średniej ruchomej q wynosi 0. Wynika to z obserwacji, że wszystkie wartości funkcji autokorelacji znajdują się pomiędzy wartościami $\pm 1.96/\sqrt{n}$ i prawie wszystkie wartości funkcji autokorelacji cząstkowej mieszczą się we wspomnianym zakresie. Biorąc pod uwagę poczynione obserwacje oraz cel minimalizacji kryterium $AICc$ optymalnym modelem okazuje się być $ARIMA(0,1,0)$. Jedyny parametr, który będziemy estymować to dryf. Użyjemy do tego metody największej wiarygodności. Spójrzmy teraz, jak dobrany proces przybliży rzeczywiste wartości.



Wykres 15: Porównanie dopasowania procesu $ARIMA(0,1,0)$ do rzeczywistych wartości, na podstawie danych: Stany Zjednoczone 1955-2019.

Widoczne na wykresie 15 dopasowanie możemy uznać za satysfakcjonujące. Proces bardzo dobrze oddaje kształt zmian rzeczywistego zachowania $\widehat{\kappa}_t$. Obserwujemy niewielkie przesunięcie wykresów względem siebie, które może być spowodowane nieregularnościami w zmianach rzeczywistych wartości $\widehat{\kappa}_t$. Zweryfikujmy jeszcze zachowanie residuów dobrego procesu.



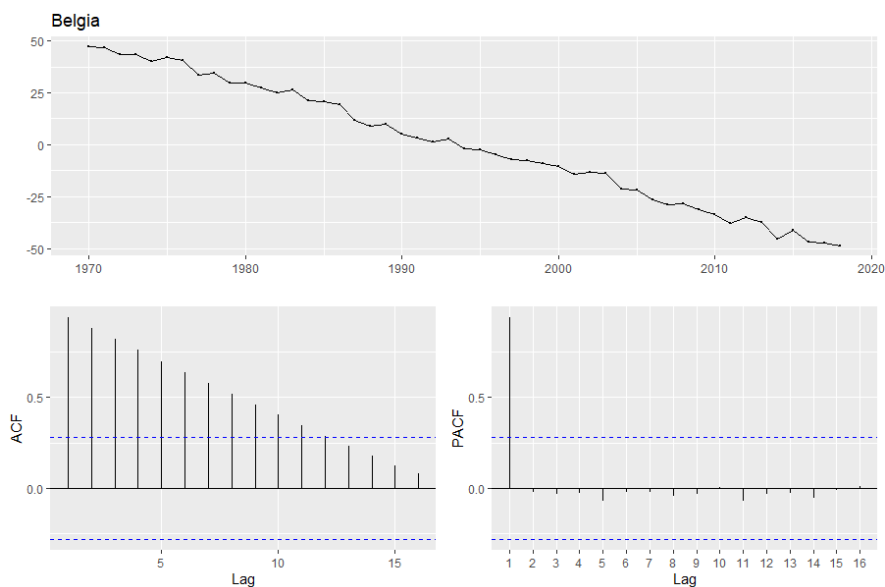
Wykres 16: Właściwości residuów dopasowanego modelu: wartości residuów (górny panel), funkcja autokorelacji (lewy dolny panel) oraz histogram wartości resztowych (prawy dolny panel), na podstawie danych: Stany Zjednoczone 1955-2019.

Przedstawione na wykresie 16 zachowanie wartości resztowych dobrego modelu jest poprawne. Nie obserwujemy żadnej struktury, względem której zmieniają się wartości residuów, wykres wskazuje na ich losowe zachowanie. Wszystkie wartości funkcji autokorelacji mieszczą się w przedziale $\pm 1.96/\sqrt{n}$, a widoczny obok histogram wskazuje, iż dane można przybliżyć rozkładem normalnym. Oznacza to, że residua są: stacjonarne, niezależne i pochodzą z rozkładu normalnego. Zweryfikujmy jeszcze te spostrzeżenia w oparciu o wynik testu Ljungu-Boxa. Uzyskana *p-wartość* wynosi 0.1632 i jest większa niż przyjęty poziom istotności $\alpha = 0.05$. Oznacza to, że nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Zachowanie wartości resztowych jest więc poprawne.

Ostatnim elementem naszej weryfikacji byłoby zbadanie położenia pierwiastków wielomianów charakterystycznych autoregresji i średniej ruchomej względem okręgu jednostkowego. Jednakże dobrany przez nas proces to $ARIMA(0,1,0)$ zatem pominąć możemy sprawdzenie położenia wspomnianych wyżej pierwiastków, gdyż rząd autoregresji $p = 0$ i rząd średniej ruchomej $q = 0$. Odpowiadający proces $ARMA(0,0)$ jest więc odwracalny i stacjonarny.

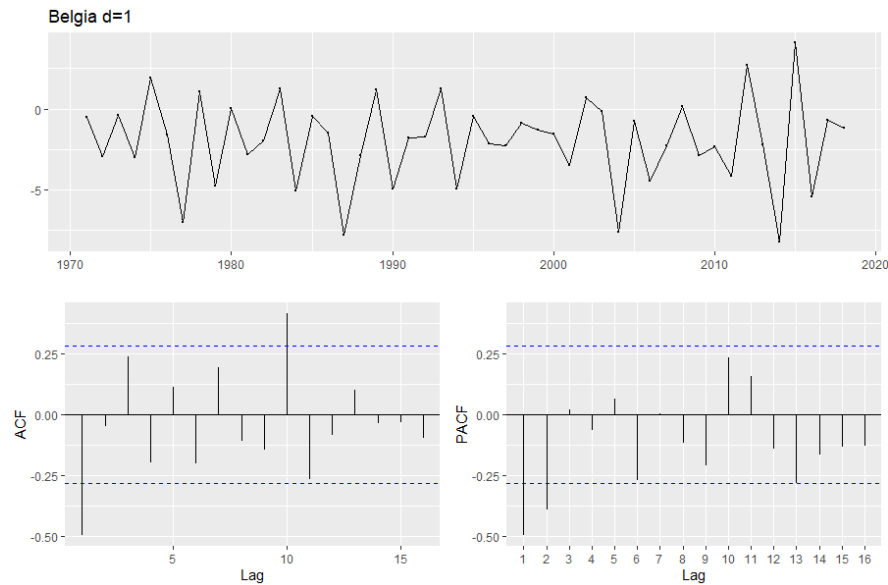
Belgia

Dla danych dotyczących Belgii dysponujemy wartościami estymatora $\widehat{\kappa}_t$ uzyskanymi w oparciu o lata kalendarzowe $t \in \{1970, 1981, \dots, 2018\}$ i wiek $x \in \{0, 1, 2, \dots, 103\}$. Do modelowania zachowania $\widehat{\kappa}_t$ wykorzystamy cały zbiór obserwacji. Etap dopasowania modelu rozpoczniemy od analizy wykresów: wartości estymatora $\widehat{\kappa}_t$, autokorelacji oraz cząstkowej autokorelacji.



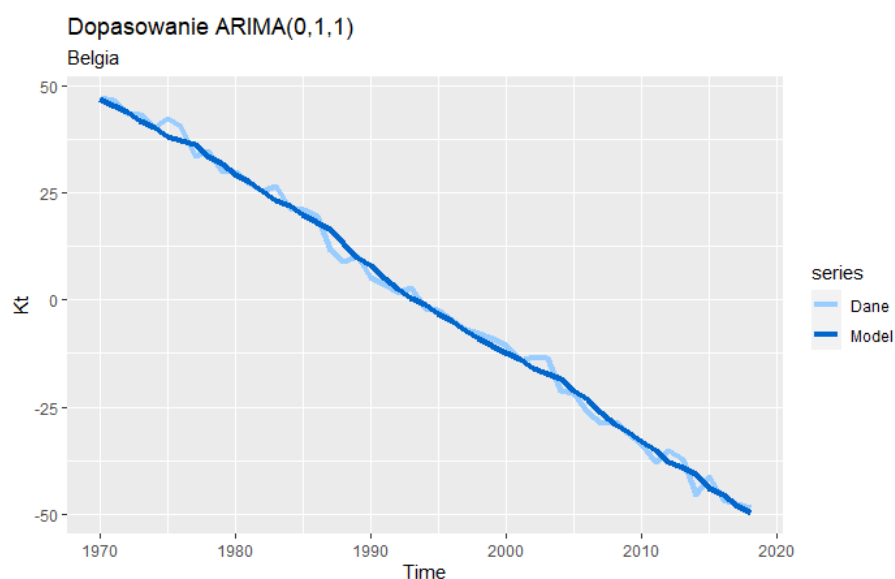
Wykres 17: Wartości estymatora $\widehat{\kappa}_t$ (górny panel), wykres autokorelacji (lewy dolny panel) oraz wykres autokorelacji cząstkowej (prawy dolny panel), na podstawie danych: Belgia 1970-2018.

Na wykresie 17 widzimy, że wartość estymatora $\widehat{\kappa}_t$ maleje liniowo na rozpatrywanym przez nas przedziale czasowym. Wskazuje to na istnienie liniowego trendu o charakterze malejącym. Ponownie, jak w przypadku danych dotyczących Polski, mamy do czynienia z dryfem. Potwierdza to zachowanie funkcji autokorelacji, która maleje wraz ze wzrostem opóźnienia h . Istnienie dryfu postaramy się wyeliminować wykorzystując operator różnicowania. Spójrzmy zatem na wykresy uzyskane dla danych po jednokrotnym zróżnicowaniu.



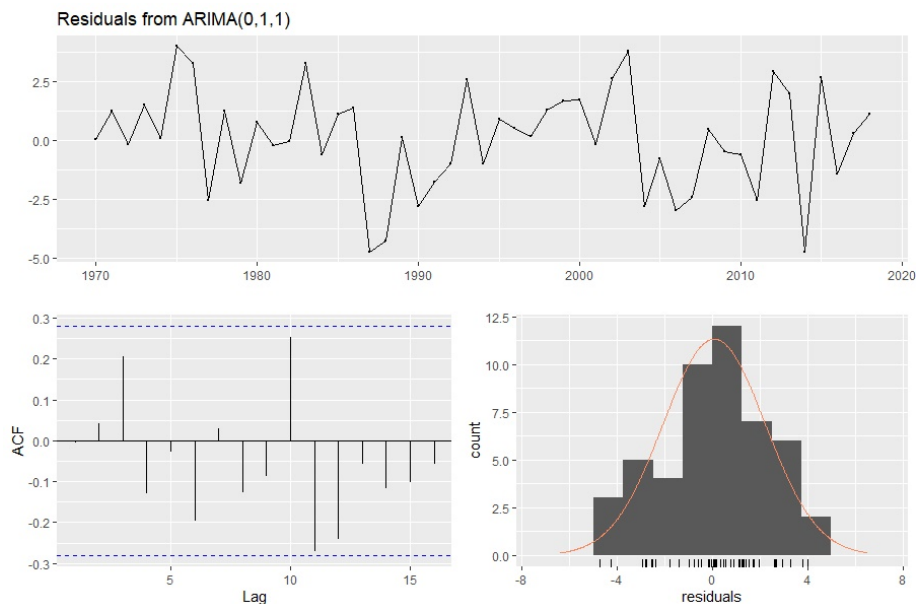
Wykres 18: Wartości estymatora $\widehat{\kappa}_t$ po zróżnicowaniu (górny panel), wykres autokorelacji (lewy dolny panel) oraz wykres autokorelacji cząstkowej (prawy dolny panel), na podstawie danych: Belgia 1970-2018.

Obserwujemy, iż na wykresie zróżnicowanych wartości estymatora $\widehat{\kappa}_t$ nie istnieje widoczna struktura, względem której układają się nasze dane. Oznacza to, iż pomyślnie usunęliśmy obserwowany wcześniej trend. Wykresy autokorelacji i autokorelacji cząstkowej sugerują, iż w tym przypadku wybór rzędu autoregresji i średniej ruchomej nie jest tak oczywisty jak dla danych dotyczących Polski. Należy rozważyć potencjalne modele i wybrać spośród nich ten, który minimalizuje kryterium $AICc$. Po porównaniu m.in. modeli $ARIMA(0,1,1)$, $ARIMA(1,1,0)$, $ARIMA(1,1,1)$ optymalnym wyborem okazuje się być proces $ARIMA(0,1,1)$. Parametry wybranego modelu wyestymujemy wykorzystując metodę największej wiarygodności. Spójrzmy, jak prezentuje się dopasowanie procesu do wyjściowych danych.



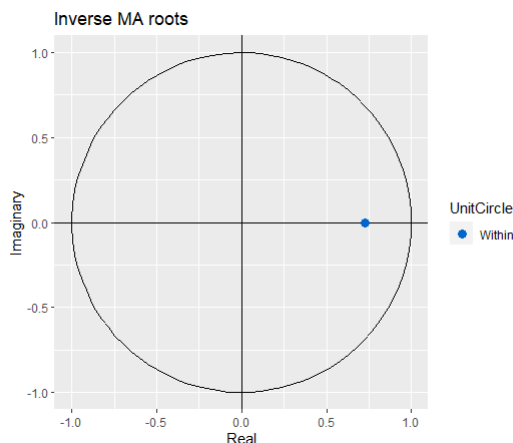
Wykres 19: Porównanie dopasowania procesu $ARIMA(0,1,1)$ do rzeczywistych wartości, na podstawie danych: Belgia 1970-2018.

Dopasowanie widoczne na wykresie 19 nie spełnia do końca naszych oczekiwań. Wyjściowe dane pomimo swojego liniowego charakteru ulegają pewnym zaburzeniom. Dopasowana, na podstawie dobranego procesu, krzywa niestety nie oddaje wszystkich wspomnianych zmian. Ma ona charakter bardziej ogólny i próbuje uśrednić zachowanie obserwowanych wartości. Świadomi wad dopasowanego modelu spójrzmy na zachowanie reszduów dobranego procesu.



Wykres 20: Własności reszduów dopasowanego modelu: wartości reszduów (górny panel), funkcja autokorelacji (lewy dolny panel) oraz histogram wartości resztowych (prawy dolny panel), na podstawie danych: Belgia 1970-2018.

Widoczne na wykresie 20 zachowanie wartości resztowych wskazuje na prawidłowe własności reszduów. Uzyskana w teście Ljungu-Boxa p -wartość wynosi 0.1908 i jest większa niż przyjęty poziom istotności $\alpha = 0.05$. Oznacza to, iż nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Test potwierdza więc obserwacje poczynione na podstawie wykresów. Sprawdźmy jeszcze położenie pierwiastków wielomianów charakterystycznych autoregresji i średniej ruchomej względem okręgu jednostkowego.

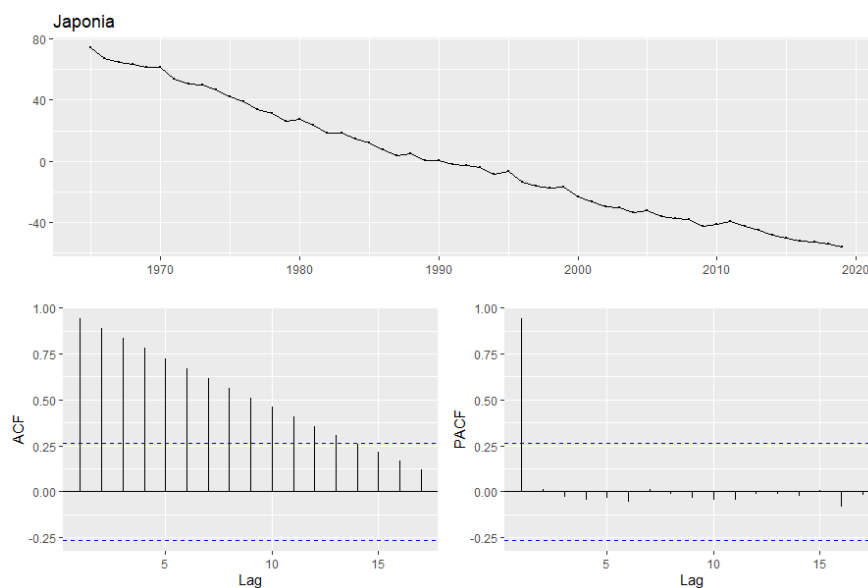


Wykres 21: Pierwiastki wielomianów charakterystycznych autoregresji i średniej ruchomej, na podstawie danych: Belgia 1970-2018.

Zauważamy, że pierwiastek wielomianu charakterystycznego średniej ruchomej znajduje się wewnątrz koła jednostkowego. Natomiast z uwagi na fakt, iż rząd autoregresji $p = 0$ nie obserwujemy żadnych pierwiastków związanych z tym procesem. Powyższe obserwacje oznaczają, że odpowiadający proces $ARMA(0,1)$ jest odwracalny i stacjonarny.

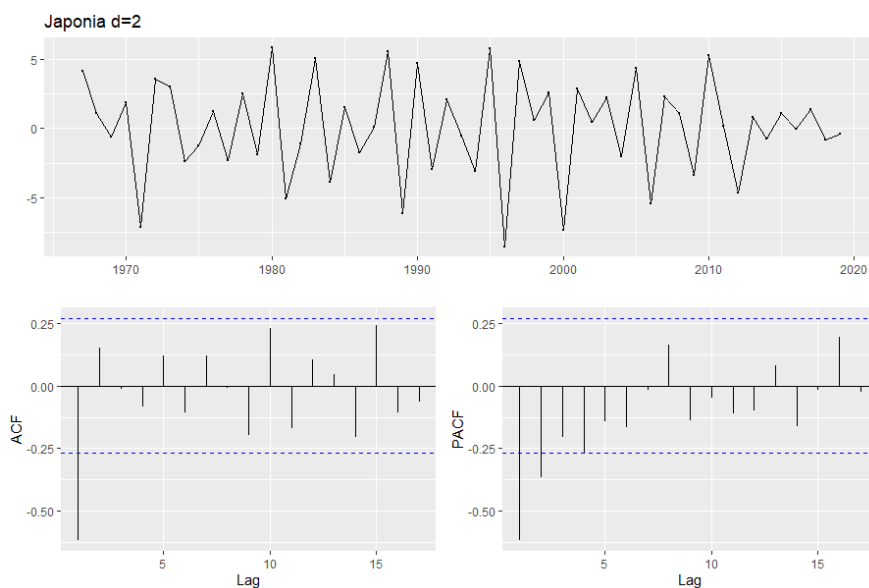
Japonia

Dla danych dotyczących Japonii naszą analizę przeprowadzimy dla wartości $\widehat{\kappa}_t$ uzyskanych w oparciu o lata kalendarzowe $t \in \{1965, 1966, \dots, 2019\}$ i wiek $x \in \{0, 1, \dots, 104\}$. Dopasowanie modelu rozpoczniemy od analizy wykresu zmiany wartości $\widehat{\kappa}_t$ oraz wykresów funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej.



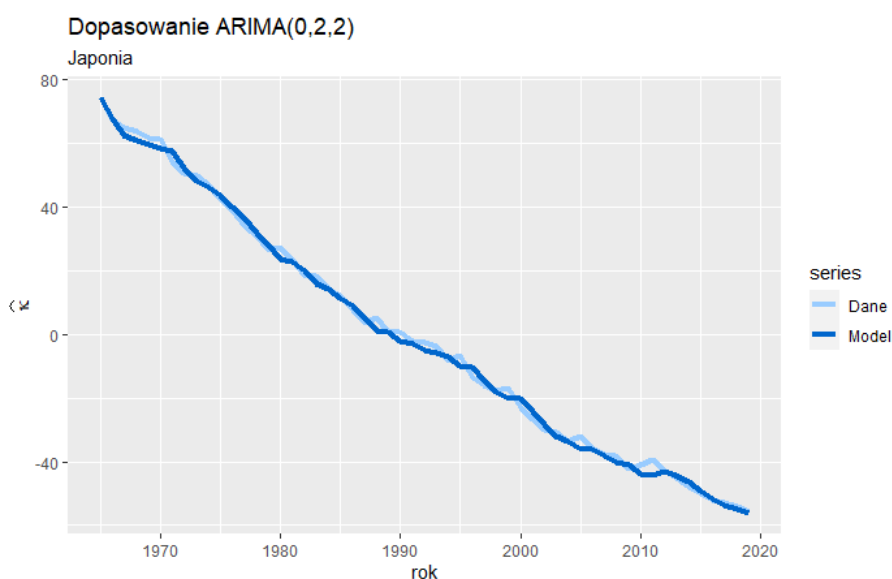
Wykres 22: Wartości estymatora $\widehat{\kappa}_t$ (górny panel), wykres autokorelacji (lewy dolny panel) oraz wykres autokorelacji cząstkowej (prawy dolny panel), na podstawie danych: Japonia 1965-2019.

Przedstawione na wykresie 22 zachowanie $\widehat{\kappa}_t$ sugeruje, iż szereg, z którym mamy do czynienia nie jest stacjonarny. Widzimy, że wartości estymatora maleją na całym przedziale czasowym. Aby uzyskać stacjonarność szeregu konieczne było dwukrotne zastosowanie operatora różnicowania. Zobaczmy, jak prezentuje się szereg po wykonaniu tej operacji.



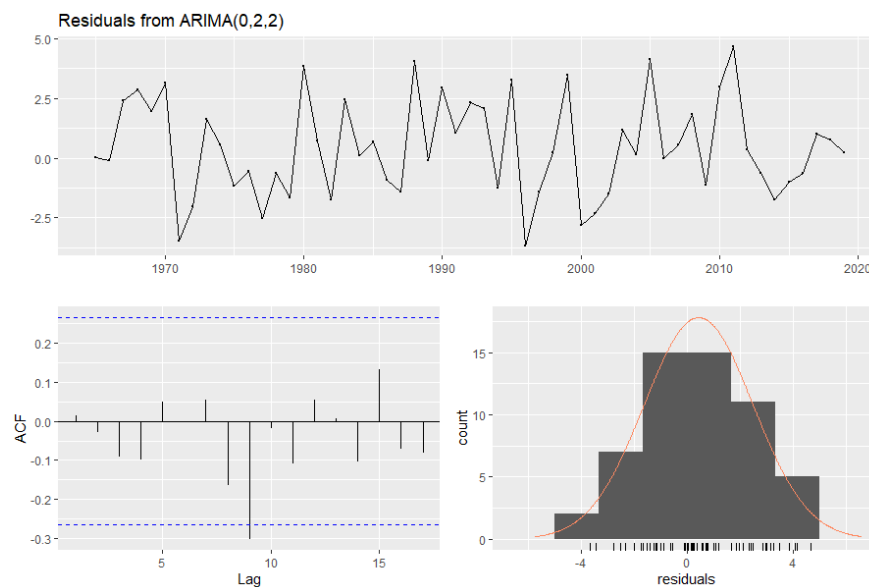
Wykres 23: Wartości estymatora $\widehat{\kappa}_t$ po dwukrotnym zróżnicowaniu (górny panel), wykres autokorelacji (lewy dolny panel) oraz wykres autokorelacji cząstkowej (prawy dolny panel), na podstawie danych: Japonia 1965-2019.

Wykres 23 sugeruje, że dwukrotne zastosowanie operatora różnicowania pozwoliło nam na uzyskanie stacjonarności szeregu. Wykresy funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej wskazują na to, że podczas doboru modelu pod uwagę warto wziąć procesy, których rząd autoregresji $p = 1$ lub rząd średniej ruchomej $q = 2$. Biorąc pod uwagę poczynione obserwacje i chęć minimalizacji kryterium $AICc$ optymalnym wyborem okazuje się być proces $ARIMA(0,2,2)$. Wybór ten pociąga za sobą konieczność estymacji dwóch współczynników średniej ruchomej, co uczynimy z wykorzystaniem metody największej wiarygodności. Spójrzmy, jak prezentuje się dopasowany przez nas proces w porównaniu do rzeczywistych danych.



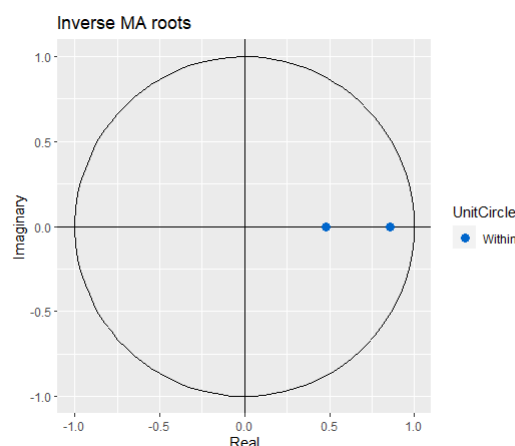
Wykres 24: Porównanie dopasowania procesu $ARIMA(0,2,2)$ do rzeczywistych wartości, na podstawie danych: Japonia 1965-2019.

Widoczne na wykresie 24 dopasowanie procesu do wyjściowych danych jest bardzo dobre. Obserwujemy, że dobrany proces wiernie oddaje kształt rzeczywistych zmian estymatora $\widehat{\kappa}_t$. Zbadajmy jeszcze własności wartości resztowych dopasowanego procesu.



Wykres 25: Własności resztuów dopasowanego modelu: wartości resztuów (górny panel), funkcja autokorelacji (lewy dolny panel) oraz histogram wartości resztowych (prawy dolny panel), na podstawie danych: Japonia 1965-2019.

Możemy zauważyć, iż analiza przebiegu wartości resztowych, wartości funkcji autokorelacji oraz histogramu z dołączoną krzywą rozkładu normalnego wskazuje na prawidłowe własności resztuów. Uzyskana w teście Ljungu-Boxa *p*-wartość wynosi 0.3027 i jest większa od przyjętego poziomu istotności $\alpha = 0.05$. W konsekwencji nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej i przyjmujemy, że reszta wykazują prawidłowe własności. Sprawdźmy jeszcze położenie pierwiastków wielomianu średniej ruchomej względem okręgu jednostkowego.



Wykres 26: Pierwiastki wielomianu charakterystycznego średniej ruchomej, na podstawie danych: Japonia 1965-2019.

Możemy zauważyć, że pierwiastki średniej ruchomej znajdują się wewnątrz koła jednostkowego, co oznacza, że odpowiadający proces $ARMA(0,2)$ jest stacjonarny i odwracalny.

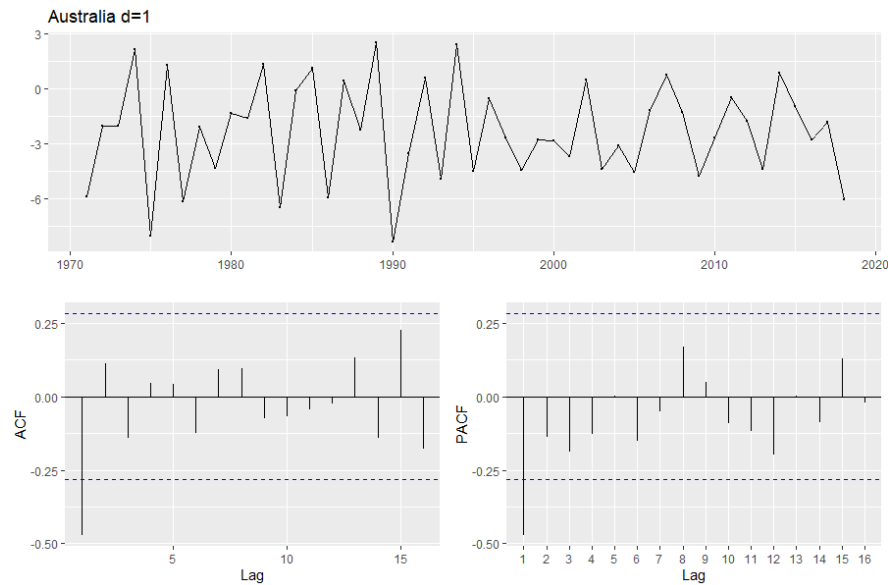
Australia

Dobór procesu do danych dotyczących Australii oprzemy o wartości estymatora $\widehat{\kappa}_t$ uzyskane w oparciu o lata kalendarzowe $t \in \{1970, 1971, \dots, 2018\}$ i wiek $x \in \{0, 1, \dots, 104\}$. Spójrzmy na wykresy przedstawiające zmiany wartości tego estymatora, wartości funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej.



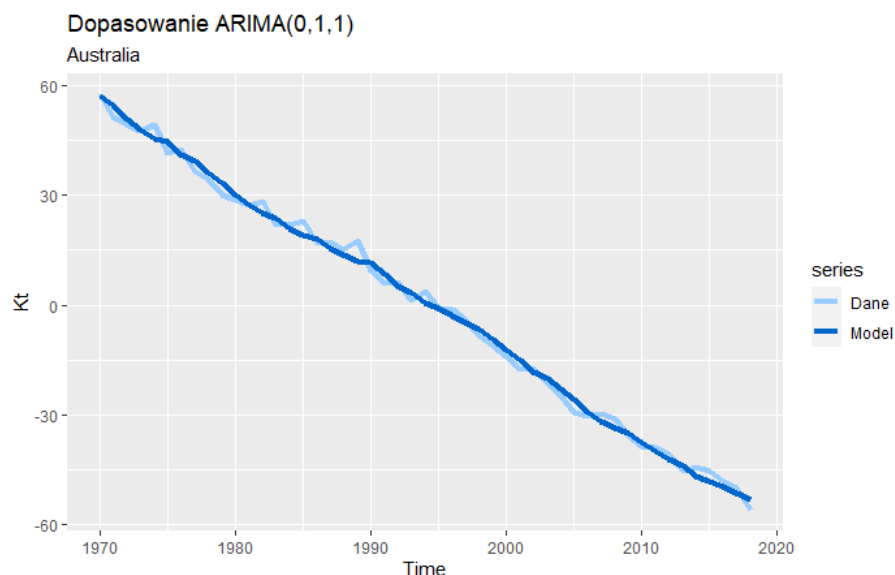
Wykres 27: Wartości estymatora $\widehat{\kappa}_t$ (górny panel), wykres autokorelacji (lewy dolny panel) oraz wykres autokorelacji cząstkowej (prawy dolny panel), na podstawie danych: Australia 1970-2018.

Możemy zauważyć, że zmiany wartości $\widehat{\kappa}_t$ charakteryzują się liniowym spadkiem wraz ze wzrostem roku kalendarzowego t . Szereg nie jest więc stacjonarny, obserwujemy istnienie dryfu. Zachowanie funkcji autokorelacji potwierdza wcześniejsze spostrzeżenia. Jej wartości maleją wraz ze wzrostem opóźnienia. Poddamy więc nasz szereg jednokrotnemu różnicowaniu i sprawdzimy, jak wtedy zachowują się nasze dane.



Wykres 28: Wartości estymatora $\hat{\kappa}_t$ po jednokrotnym zróżnicowaniu (górny panel), wykres autokorelacji (lewy dolny panel) oraz wykres autokorelacji cząstkowej (prawy dolny panel), na podstawie danych: Australia 1970-2018.

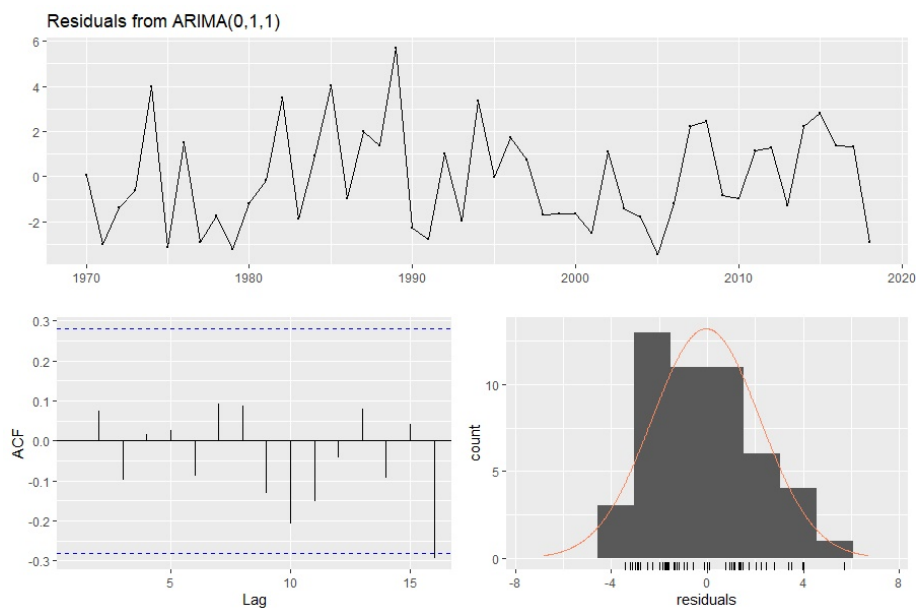
Możemy zauważyć, że w zmianach wartości przedstawionych na wykresie 28 nie dostrzegamy widocznego wcześniej trendu. Stąd przyjąć możemy, iż parametr d równa się 1. Analiza funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej sugeruje, iż podczas doboru odpowiedniego procesu należy wziąć pod uwagę modele z rzędem autoregresji $p = 1$ lub rzędem średniej ruchomej $q = 1$. Mając na uwadze poczynione obserwacje i cel minimalizacji kryterium $AICc$ optymalnym modelem okazuje się być $ARIMA(0,1,1)$. Estymację potrzebnych wielkości oprzemy na metodzie największej wiarygodności. Spójrzmy, jak prezentuje się dopasowany przez nas proces w stosunku do wyjściowych danych.



Wykres 29: Porównanie dopasowania procesu $ARIMA(0,1,1)$ do rzeczywistych wartości, na podstawie danych: Australia 1970-2018.

Widzimy, że prezentowane na wykresie 29 dopasowanie nie jest satysfakcjonujące. Nasz

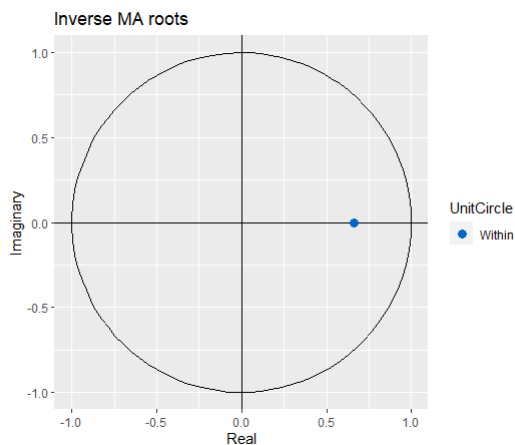
proces nie oddaje w pełni charakteru rzeczywistych zmian $\widehat{\kappa}_t$, a w pewnym stopniu stara się uśrednić wahania prawdziwych wartości estymatora. Spójrzmy, jak zachowują się wartości resztowe dopasowanego modelu.



Wykres 30: Własności resztuów dopasowanego modelu: wartości resztuów (górny panel), funkcja autokorelacji (lewy dolny panel) oraz histogram wartości resztowych (prawy dolny panel), na podstawie danych: Australia 1970-2018.

Dostrzegamy, że wartości resztowe modelu zmieniają się w sposób losowy. Również wykres autokorelacji i histogram z dołączoną krzywą rozkładu normalnego wskazują na prawidłowe zachowanie resztuów. Otrzymana w teście Ljunga-Boxa p -wartość wynosi 0.6345. Oznacza to, iż nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Zatem wartości resztowe dopasowanego modelu wykazują poprawne własności.

Zobaczmy jeszcze, jak w stosunku do okręgu jednostkowego położone są pierwiastki wielomianu charakterystycznego średniej ruchomej, gdyż jak wiemy uzyskany przez nas rząd autoregresji $p = 0$ i rząd średniej ruchomej $q = 1$.

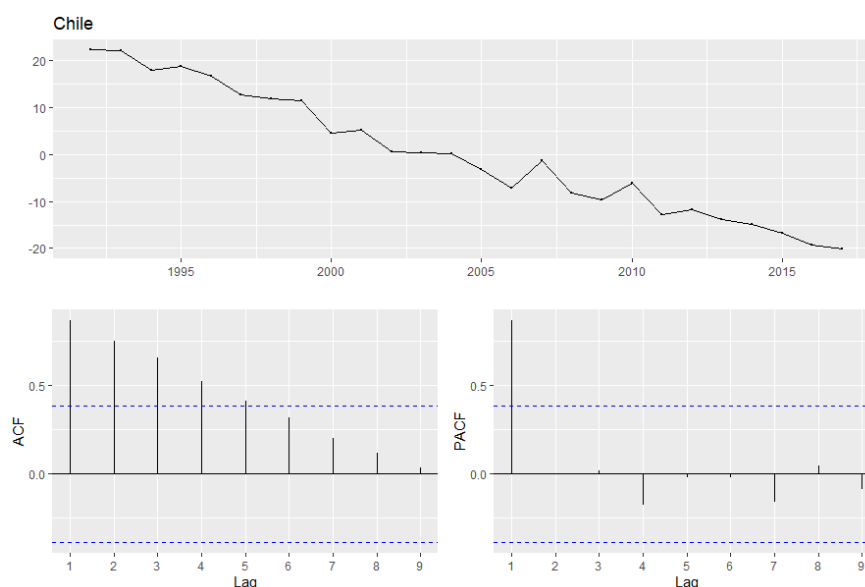


Wykres 31: Pierwiastki wielomianu charakterystycznych średniej ruchomej, na podstawie danych: Australia 1970-2018.

Jedyny pierwiastek wielomianu charakterystycznego średniej ruchomej położony jest wewnątrz koła jednostkowego, co oznacza, że odpowiadający proces $ARMA(0,1)$ jest stacjonarny i odwracalny.

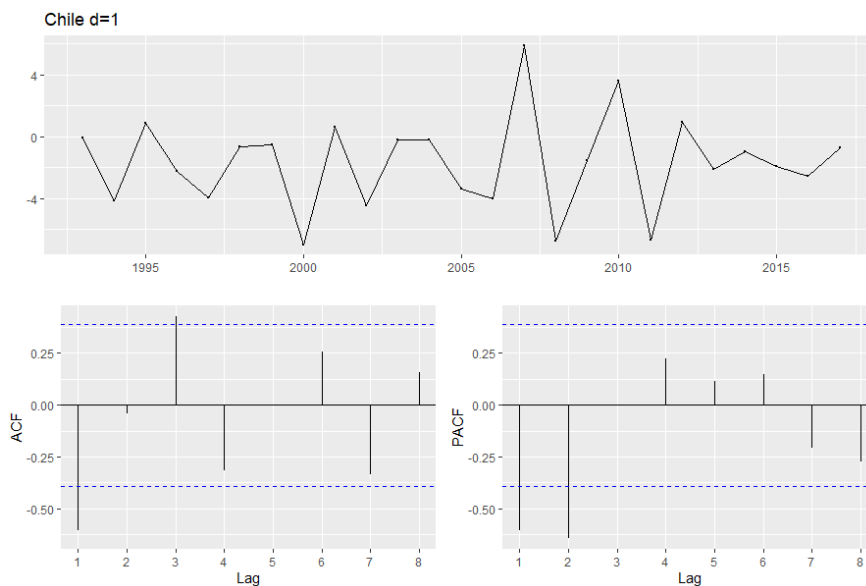
Chile

W przypadku danych dotyczących Chile, analizie poddamy zachowanie estymatora $\widehat{\kappa}_t$ uzyskanego w oparciu o lata kalendarzowe $t \in \{1992, 1993, \dots, 2017\}$ oraz wiek $x \in \{0, 1, \dots, 107\}$. Spójrzmy, jak przedstawia się wykres zmian wartości $\widehat{\kappa}_t$ i wykresy funkcji autokorelacji oraz autokorelacji cząstkowej.



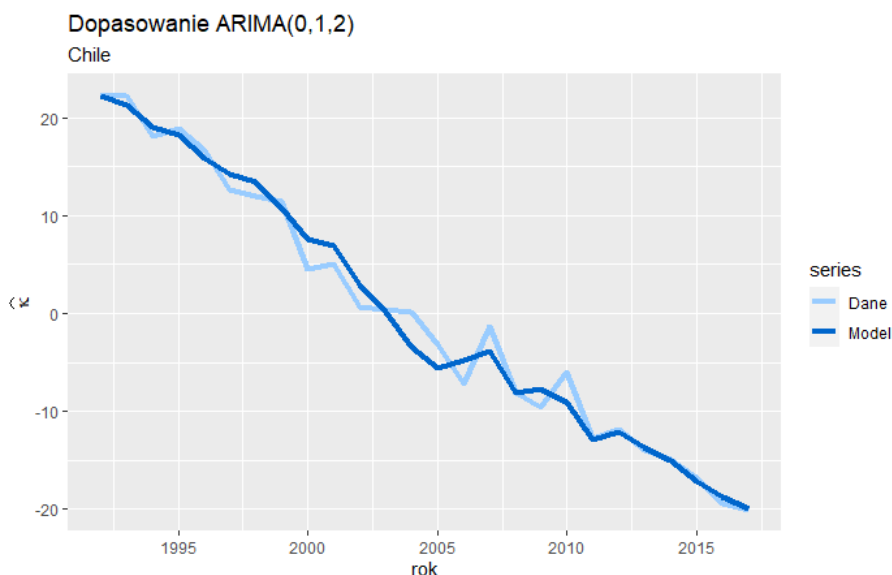
Wykres 32: Wartości estymatora $\widehat{\kappa}_t$ (górny panel), wykres autokorelacji (lewy dolny panel) oraz wykres autokorelacji cząstkowej (prawy dolny panel), na podstawie danych: Chile 1992-2017.

Możemy zauważyć, że wartości $\widehat{\kappa}_t$ maleją wraz ze wzrostem roku kalendarzowego t , choć spadek ten przeplata się z niewielkimi wzrostami. Zachowanie funkcji autokorelacji sugeruje, iż analizowany szereg nie jest stacjonarny. Sprawdźmy, jak prezentują się wartości szeregu po jednokrotnym zróżnicowaniu.



Wykres 33: Wartości estymatora $\widehat{\kappa}_t$ po jednokrotnym zróżnicowaniu (górny panel), wykres autokorelacji (lewy dolny panel) oraz wykres autokorelacji cząstkowej (prawy dolny panel), na podstawie danych: Chile 1992-2017.

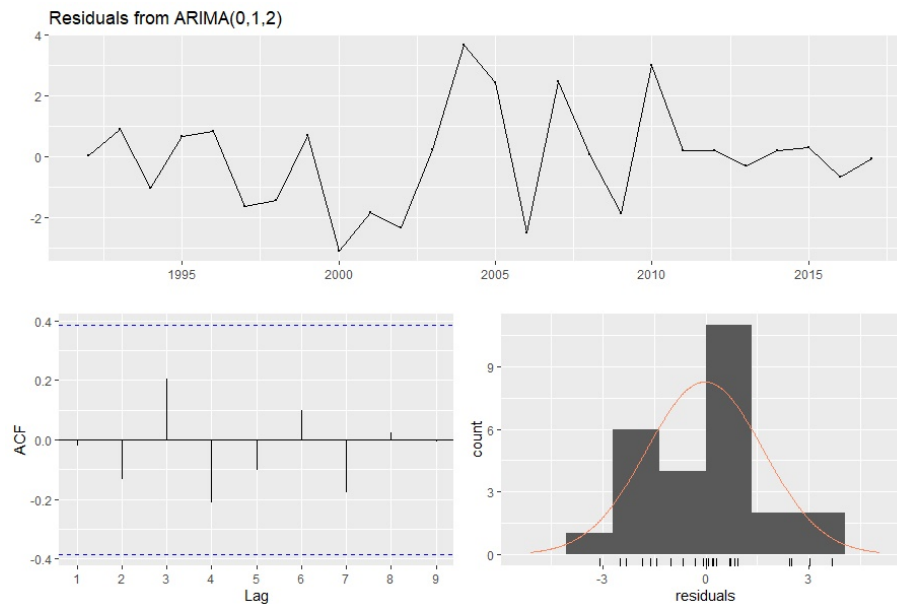
Widzimy, że zachowanie wartości $\widehat{\kappa}_t$ po zróżnicowaniu nie charakteryzuje żadna określona struktura, co świadczy o tym, że uzyskany proces jest stacjonarny. Wykresy autokorelacji i autokorelacji cząstkowej sugerują, by podczas doboru procesu opisującego badane zjawisko rozważyć modele, w których rząd autoregresji $p = 1$ lub rząd średniej ruchomej $q = 2$. Biorąc pod uwagę również minimalizację kryterium $AICc$ optymalnym procesem okazuje się być $ARIMA(0,1,2)$. Aby dopasować proces do rzeczywistych danych konieczna jest jeszcze estymacja dryfu i dwóch współczynników średniej ruchomej, co uczynimy z wykorzystaniem metody największej wiarygodności.



Wykres 34: Porównanie dopasowania procesu $ARIMA(0,1,2)$ do rzeczywistych wartości, na podstawie danych: Chile 1992-2017.

Dopasowanie przedstawione na wykresie 34 nie oddaje w pełni rzeczywistych zmian

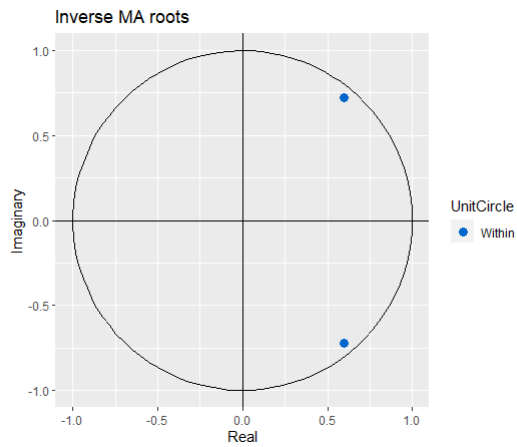
wartości $\widehat{\kappa}_t$, jednakże obserwujemy bardzo dobre dopasowanie dla obserwacji po roku 2011. Przed tym rokiem wykres dopasowanych wartości jest nieco wypłaszczony w stosunku do wyjściowych danych, które charakteryzują pewne zaburzenia. Sprawdźmy jeszcze, jak prezentują się własności wartości resztowych.



Wykres 35: Własności residuów dopasowanego modelu: wartości residuów (górny panel), funkcja autokorelacji (lewy dolny panel) oraz histogram wartości resztowych (prawy dolny panel), na podstawie danych: Chile 1992-2017.

Prezentowane na wykresie 35 zmiany wartości resztowych sugerują ich stacjonarność. Analiza funkcji autokorelacji i histogramu pozwala ocenić, iż residua są niezależne i można je przybliżyć rozkładem normalnym. Uzyskana w teście Ljunga-Boxa *p*-wartość to 0.2519. Jest ona większa od przyjętego poziomu istotności $\alpha = 0.05$ i oznacza, że nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Residua dobranego modelu wykazują więc prawidłowe własności.

Spójrzmy jeszcze na położenie pierwiastków wielomianu charakterystycznego średniej ruchomej, gdyż jak wiemy parametr $q = 2$.



Wykres 36: Pierwiastki wielomianu charakterystycznych średniej ruchomej, na podstawie danych: Chile 1992-2017.

Widzimy, że oba pierwiastki wielomianu charakterystycznego średniej ruchomej znajdują się wewnątrz koła jednostkowego, zatem odpowiedni proces $ARMA(0,2)$ jest odwracalny i stacjonarny.

Bibliografia

- [1] Błaszczyszyn B., Rolski T. (2018). *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*. Wydawnictwo Naukowe PWN.
- [2] Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics, Second Edition*. Society of Actuaries.
- [3] Brockwell, P. J., Davis, R. A. (1991). *Time series: theory and methods*. Springer.
- [4] Brockwell, P. J., Davis, R. A. (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting, Second Edition*. Springer.
- [5] Brouhns, N., Denuit, M., Vermunt, J. K. (2002). A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics*. **31** 373-393.
- [6] Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., Khalaf-Allah, M. (2011). Mortality density forecasts: An analysis of six stochastic mortality models. *Insurance: Mathematics and Economics*. **48** 355–367.
- [7] Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., Ong, A., Balevich, I. (2009). A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England & Wales and the United States. *North American Actuarial Journal*. **13(1)** 1-35.
- [8] Human Mortality Database. <https://www.mortality.org/>
- [9] Lee, R. D., Carter, L. R. (1992). Modeling and Forecasting U.S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*. **87** 659–671.
- [10] Lee, R. (2000). The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications. *North American Actuarial Journal*. **4(1)** 80-93.
- [11] Li, S. H., Chan, W. S. (2007). The Lee–Carter Model for Forecasting Mortality, Revisited. *North American Actuarial Journal*. **11(1)** 68-89.
- [12] Metcalfe, A.V., Cowpertwait, P.S.P. (2009). *Introductory Time Series with R*. Springer.
- [13] Pitacco, E., Denuit M., Haberman S., Olivieri A. (2009). *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*. Oxford: Oxford University Press.
- [14] Szczotka, W. (2020) *Skrypt do wykładu: Szeregi Czasowe*. Uniwersytet Wrocławski.