

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: Matematyka aktuarialno-finansowa

Kacper Toczek

Miary ryzyka dla jedno- i wielowymiarowego
rozkładu Weibulla

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
dra Marka Arendarczyka

Wrocław 2021

Spis treści

Wstęp	3
1 Mieszanki rozkładów	5
1.1 Podstawowe definicje	5
1.2 Przykłady mieszanek	6
2 Rozkład Weibulla	13
3 Miary ryzyka	17
3.1 Miary ryzyka dla rozkładów jednowymiarowych	17
3.2 Miary ryzyka dla rozkładów dwuwymiarowych	24
3.3 Miary ryzyka dla rozkładów wielowymiarowych	26
Bibliografia	30

Wstęp

Nie ma na świecie osoby, która wie co wydarzy się w przyszłości. Nie wiemy co dokładnie wydarzy się za minutę, dzień czy rok. Niektóre zdarzenia możemy zaplanować, a na pozostałe nie mamy wpływu. Wszędzie tam, gdzie spotykamy się ze zjawiskami losowymi, ważna jest znajomość rachunku prawdopodobieństwa. Instytucje finansowe takie jak np. firmy ubezpieczeniowe, banki czy domy maklerskie muszą umieć oszacować prawdopodobieństwa wystąpienia pewnych zdarzeń. Firmy ubezpieczeniowe muszą oszacować prawdopodobieństwo wystąpienia pożaru w danym miejscu czy kolizji drogowej dla pewnego kierowcy. Banki muszą ocenić z jakim prawdopodobieństwem kredytobiorca przestanie spłacać zaciągnięty kredyt. Natomiast makler powinien umieć w rzetelny sposób spekulować przyszłe notowania instrumentów, w które inwestuje.

Ważnym zagadnieniem w świecie finansów jest wycena ryzyka. Różnego rodzaju metody probabilistyczne i statystyczne pomagają w tworzeniu modeli, dzięki którym instytucja finansowa może określić jakie będą jej potencjalne straty, na które jest narażona, oraz czy pozostanie wypłacalna, w stosunku do podmiotów, z którymi jest powiązana różnego typu umowami. Aktualnie na rynku mamy możliwość handlu ryzykiem, które jest traktowane jak dobra materialne. Instytucje finansowe są skłonne zainwestować swój kapitał w inwestycje obarczone ryzykiem, o ile przyniesie im to zysk adekwatny do ponoszonego ryzyka. Jednym z podstawowych narzędzi do jego oceny są miary ryzyka. Ze względu na ogromną ilość czynników wpływających na ryzyko, nie istnieje jedna, uniwersalna miara.

Różnego rodzaju miary ryzyka, które mają zastosowanie w finansach i ubezpieczeniach, możemy odnaleźć w literaturze. Temu zagadnieniu poświęcona jest na przykład monografia [5], która dotyczy głównie miar ryzyka dla modeli jednowymiarowych. Współczesne badania koncentrują się również na wielowymiarowych miarach ryzyka, co możemy zaobserwować w pracach takich jak [1], [2], [3], [14], [4] czy [6]. Praca [6] została poświęcona badaniu asymptotycznego zachowania miar Marginal Mean Excess (MME) i Marginal Expected Shortfall (MES) dla wielowymiarowego rozkładu normalnego. Natomiast w [4] są analizowane asymptotyczne zachowania MME i MES dla zmiennych losowych o rozkładach ciężkoogonowych. W [14] wyprowadzone zostały wzory na Tail Conditional Expectation (TCE) dla wielowymiarowego rozkładu Pareto drugiego rodzaju. Ze względu na złożoną postać rozkładu, były to wzory rekurencyjne. W pracy [1] została wyliczona miara ryzyka Mixed Conditional Tail Expectation (MCTE) dla wielowymiarowego rozkładu Pareto. Powyższe prace koncentrowały się głównie na liczeniu asymptotyk oraz różnych klasach rozkładów lekko i ciężkoogonowych. Dokładne wyniki są znane przede wszystkim dla rozkładu Pareto. Nie ma natomiast pozycji poświęconych miarom ryzyka dla wielowymiarowego rozkładu Weibulla.

Celem tej pracy jest przedstawienie różnych miar ryzyka i policzenie ich dla rozkładu Weibulla jednowymiarowego oraz wyprowadzenie wzorów na MES i MME dla wielowymiarowego rozkładu Weibulla. Te dwie miary ryzyka pozwalają nam poznać ryzyko związane z jedną z n linii biznesowych danej firmy na podstawie informacji o pozostałych $n - 1$ liniach. W pracy zostanie również zaprezentowane wyprowadzenie rozkładu We-

ibulla za pomocą mieszanki rozkładu wykładniczego i rozkładu Lévy'ego. W pierwszym rozdziale zapoznamy się z definicją ciągłej oraz dyskretnej mieszanki rozkładów. Znajdują się tam również przykłady znanych rozkładów prawdopodobieństwa uzyskanych dzięki mieszankom innych znanych i szeroko stosowanych rozkładów. W drugim rozdziale przedstawiony jest rozkład Weibulla, dla którego będziemy następnie wyliczać miary ryzyka. Dowiemy się również jak uzyskać ten rozkład za pomocą mieszanek. Kolejny rozdział poświęcony jest różnym miarom ryzyka, zarówno jednowymiarowym jak i wielowymiarowym. Każda miara jest również policzona dla ryzyka pochodzącego z rozkładu Weibulla. Szczególnie ciekawe są przypadki wielowymiarowych miar ryzyka. Wszystkie miary zostaną również przeanalizowane ze względu na zmiany różnych parametrów.

1 Mieszanki rozkładów

W tym rozdziale zdefiniujemy czym są mieszanki rozkładów oraz zapoznamy się z ich przykładami. Jedną z motywacji tworzenia mieszanek jest to, że zjawisko, które modelujemy może być w rzeczywistości kilkoma innymi zjawiskami występującymi z nieznanym prawdopodobieństwem. Na przykład losowo wybrane roszczenia za błędy dentystyczne mogą pochodzić z wizyty kontrolnej, wypełnienia czy skomplikowanego zabiegu chirurgicznego. Ze względu na ich zróżnicowane prawdopodobieństwa wystąpienia zastosowanie mieszanki rozkładów może okazać się dobrym wyborem.

Aby lepiej zrozumieć idee mieszanki zapoznajmy się również z inną interpretacją. Pomyślmy o dużej grupie kierowców, którzy mają ubezpieczenie na wypadek kolizji samochodowej. Załóżmy, że częstotliwość szkód w roku dla ubezpieczonego kierowcy ma rozkład Poissona ze średnią θ . Średnia liczba szkód w roku dla ubezpieczonego kierowcy wynosi θ , parametr ten odzwierciedla charakterystykę ryzyka danego kierowcy. Ponieważ populacja kierowców jest duża, istnieje niepewność co do parametru θ . Dlatego właściwsze jest traktowanie θ jako zmiennej losowej w celu uchwycenia szerokiego zakresu cech ryzyka u poszczególnych osób w populacji.

1.1 Podstawowe definicje

W [7] mieszanki są zdefiniowane w następujący sposób.

Definicja 1.1. *Zmienna losowa Y jest k -punktową mieszanką zmiennych losowych X_1, \dots, X_k , jeśli jej dystrybuanta wyrażona jest wzorem*

$$F_Y(y) = a_1 F_{X_1}(y) + a_2 F_{X_2}(y) + \dots + a_k F_{X_k}(y), \quad (1.1)$$

gdzie wszystkie $a_i > 0$ i $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1$.

Pojęcie mieszanki rozkładów można rozszerzyć od mieszania skończonej liczby zmiennych losowych do mieszania nieprzeliczalnej ilości. W poniższej definicji, $h_\Theta(\theta)$ zastępuje dyskretne prawdopodobieństwo a_i z k -punktowej mieszanki.

Definicja 1.2. *Niech $X|\Theta$ będzie ciągłą zmienną losową z gęstością $f_{X|\Theta}(x|\theta)$ i dystrybuantą $F_{X|\Theta}(x|\theta)$, gdzie θ jest parametrem w rozkładzie $X|\Theta$. Przypuśćmy, że θ jest wartością (realizacją) zmiennej losowej Θ z gęstością $h_\Theta(\theta)$ (jeśli Θ jest ciągłą zmienną losową) lub z funkcją prawdopodobieństwa $\mathbb{P}[\Theta = \theta]$ (jeśli Θ jest dyskretną zmienną losową). Mieszanką ciągłą X , rozkładu zmiennej losowej $X|\Theta$ z rozkładem zmiennej losowej Θ , nazywamy zmienną losową, której gęstość i dystrybuanta wyrażają się następującymi wzorami*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|\Theta}(x|\theta) h_\Theta(\theta) d\theta, \quad (1.2)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X|\Theta}(x|\theta) h_\Theta(\theta) d\theta, \quad (1.3)$$

jeśli Θ jest ciągłą zmienną losową, lub

$$f_X(x) = \sum_{\theta} f_{X|\Theta}(x|\theta)\mathbb{P}[\Theta = \theta], \quad (1.4)$$

$$F_X(x) = \sum_{\theta} F_{X|\Theta}(x|\theta)\mathbb{P}[\Theta = \theta], \quad (1.5)$$

jeśli Θ jest dyskretną zmienną losową. Analogicznie definiujemy ogon dystrybuanty mieszanki ciągłej.

O mieszance rozkładów możemy również myśleć jak o średniej ważonej zmiennej losowej $X|\Theta$ z wagą Θ . Idea mieszanki dyskretnej, której definicja pochodzi z [10], jest podobna do mieszanki ciągłej.

Definicja 1.3. Niech $X|\Theta$ będzie dyskretną zmienną losową z funkcją prawdopodobieństwa $\mathbb{P}[X = x|\Theta = \theta]$. Natomiast parametr θ jest wartością (realizacją) zmiennej losowej Θ z gęstością $h_{\Theta}(\theta)$ (jeśli Θ jest ciągłą zmienną losową) lub z funkcją prawdopodobieństwa $\mathbb{P}[\Theta = \theta]$ (jeśli Θ jest dyskretną zmienną losową). Mieszanką dyskretną X , rozkładu zmiennej losowej $X|\Theta$ z rozkładem zmiennej losowej Θ , nazywamy zmienną losową, której funkcja prawdopodobieństwa wyraża się wzorem

$$\mathbb{P}[X = x] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}[X = x|\Theta = \theta]h_{\Theta}(\theta)d\theta, \quad (1.6)$$

jeśli Θ jest ciągłą zmienną losową, lub

$$\mathbb{P}[X = x] = \sum_{\theta} \mathbb{P}[X = x|\Theta = \theta]\mathbb{P}[\Theta = \theta], \quad (1.7)$$

jeśli Θ jest dyskretną zmienną losową.

1.2 Przykłady mieszanek

Okazuje się, że wiele znanych rozkładów prawdopodobieństwa to mieszanki innych znanych rozkładów. W tym rozdziale zapoznamy się z kilkoma mieszankami. Poniższe przykłady możemy znaleźć w literaturze m.in. w [7] oraz w [11].

Przykład 1.4 (Wykładniczy-Gamma). Załóżmy, że zmienna losowa $X|\Theta$ ma rozkład wykładniczy z gęstością $f_{X|\Theta}(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}$, gdzie $x \geq 0$ i $\theta > 0$ jest dodatnim parametrem. Natomiast zmienna losowa Θ ma rozkład gamma z gęstością $h_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\beta^{\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}$, gdzie $\theta > 0$ oraz parametry $\alpha, \beta > 0$. Mieszanką rozkładu wykładniczego z rozkładem gamma jest rozkład Pareto(α, β).

Rozwiązanie. Zmienne losowe $X|\Theta$ oraz Θ są ciągłe. Wyliczymy gęstość mieszanki korzystając ze wzoru (1.2) z Definicji 1.2 mieszanki ciągłej.

Mamy zatem

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \int_0^\infty f_{X|\Theta}(x|\theta)h_\Theta(\theta)d\theta \\
 &= \int_0^\infty \theta e^{-\theta x} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} d\theta \\
 &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \theta^{\alpha-1+1} e^{-\beta\theta-\theta x} d\theta \\
 &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(x+\beta)^{\alpha+1}} \int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (x+\beta)^{\alpha+1} \theta^{\alpha+1-1} e^{-(x+\beta)\theta}}_{\text{gęstość rozkładu } Gamma(\alpha+1, x+\beta)} d\theta.
 \end{aligned}$$

Wyrażenie pod powyższą całką to gęstość rozkładu $Gamma(\alpha+1, x+\beta)$, więc całka wynosi 1. Zatem

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(x+\beta)^{\alpha+1}} = \frac{\alpha\beta^\alpha}{(x+\beta)^{\alpha+1}}.$$

Otrzymane z powyższych rachunków wyrażenie jest gęstością rozkładu $Pareto(\alpha, \beta)$. \square

W analogiczny sposób możemy otrzymać mieszanke rozkładów dla wielowymiarowej zmiennej losowej.

Przykład 1.5. *Mieszaną wielowymiarowego rozkładu wykładniczego z losowym parametrem o rozkładzie gamma jest wielowymiarowy rozkład Pareto.*

Rozwiązanie. Załóżmy, że $X_1|\Lambda, \dots, X_n|\Lambda$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $X_i \sim Exp(\Lambda = \lambda)$. Niech $X|\Lambda = (X_1|\Lambda, \dots, X_n|\Lambda)$, wtedy gęstość $X|\Lambda$ wyraża się wzorem

$$f_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i},$$

gdzie $\lambda > 0, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$. Załóżmy również, że Λ ma rozkład $Gamma(\alpha, \beta)$ z gęstością $h_\Lambda(\lambda)$. Gęstość mieszanek otrzymujemy w następujący sposób

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \int_0^\infty f_{X|\Lambda}(x|\lambda)h_\Lambda(\lambda)d\lambda \\
 &= \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda \\
 &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha+n-1} e^{-\lambda(\beta + \sum_{i=1}^n x_i)} d\lambda \\
 &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{(\beta + \sum_{i=1}^n x_i)^{\alpha+n}} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} (\beta + \sum_{i=1}^n x_i)^{\alpha+n} \lambda^{\alpha+n-1} e^{-\lambda(\beta + \sum_{i=1}^n x_i)} d\lambda.
 \end{aligned}$$

Wyrażenie pod powyższą całką jest gęstością rozkładu gamma z parametrami $\alpha + n$ oraz $\beta + \sum_{i=1}^n x_i$. Kontynuując

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{(\beta + \sum_{i=1}^n x_i)^{\alpha+n}} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\beta^{\alpha+n}}{\beta^n} (\beta + \sum_{i=1}^n x_i)^{-(\alpha+n)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)\beta^n} \left(1 + \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n x_i\right)^{-\alpha-n}. \end{aligned}$$

Otrzymana gęstość mieszanki jest gęstością wielowymiarowego rozkładu Pareto. W [1] dla tego rozkładu jest wyznaczana miara ryzyka MCTE. □

Tego typu mieszanki mają szerokie zastosowanie w teorii ubezpieczeń majątkowych oraz osobowych. Analogiczna mieszanka jak w Przykładzie 1.5 jest używana w [13] przy opisie bayesowskiego podejścia do wyliczania składki wiarogodności.

Przykład 1.6 (Wykładniczy-Inverse Gamma). *Niech $X|\Theta$ ma rozkład wykładniczy z parametrem $\frac{1}{\theta}$, a Θ rozkład Inverse Gamma z parametrami α i β . Mieszką tych rozkładów jest rozkład Pareto(α, β).*

Rozwiązanie. Wiemy, że $X|\Theta$ ma rozkład wykładniczy z gęstością

$$f_{X|\Theta}(x|\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}},$$

gdzie $x \geq 0$ i $\theta > 0$. Natomiast Θ ma rozkład Inverse Gamma z gęstością

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{-\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{\theta}},$$

gdzie $x, \alpha, \beta > 0$. Gęstość mieszanki wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{-\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{\theta}} d\theta \\ &= \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{-(\alpha+1)-1} e^{-\frac{x+\beta}{\theta}} d\theta \\ &= \frac{\beta^\alpha}{(x+\beta)^{\alpha+1}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{(\beta+x)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \theta^{-(\alpha+1)-1} e^{-\frac{x+\beta}{\theta}} d\theta. \end{aligned}$$

Wyrażenie pod całką to gęstość rozkładu Inverse Gamma z parametrami $\alpha + 1$ oraz $\beta + x$, więc całka wynosi 1. Zatem

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{(x+\beta)^{\alpha+1}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha\beta^\alpha}{(x+\beta)^{\alpha+1}}.$$

Otrzymana gęstość jest gęstością rozkładu $Pareto(\alpha, \beta)$. □

Uwaga 1.7. Rozkład Pareto w Przykładzie 1.6 można otrzymać bezpośrednio z Przykładu 1.4 zauważając własność, że jeśli zmienna losowa Θ ma rozkład $Gamma(\alpha, \beta)$, to zmienna losowa $\frac{1}{\Theta}$ ma rozkład $InverseGamma(\alpha, \beta)$.

Przykład 1.8 (Normalny-Normalny). Rozważmy zmienną losową $X|\Theta$ o rozkładzie normalnym $N(\Theta = \theta, \nu)$, gdzie wariancja ν jest znana. Załóżmy, że parametr Θ ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$, gdzie oba parametry są znane. Mieszkanką rozkładu normalnego z rozkładem normalnym jest rozkład normalny.

Rozwiązanie. Rozkład normalny jest rozkładem ciągłym, więc skorzystamy z Definicji 1.2, aby wyliczyć gęstość mieszanki. Otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \exp\left[-\frac{(x-\theta)^2}{2\nu}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma}\right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\nu\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\theta)^2}{2\nu} - \frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma}\right] d\theta. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Wyrażenie w wykładniku można przedstawić w alternatywnej formie

$$\frac{(x-\theta)^2}{\nu} + \frac{(\theta-\mu)^2}{\sigma} = \frac{\sigma+\nu}{\nu\sigma} \left[\theta - \frac{\sigma x + \nu\mu}{\sigma+\nu}\right]^2 + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma+\nu}. \quad (1.9)$$

Podstawiając wyrażenie (1.9) do wykładnika całki (1.8) otrzymujemy

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\nu\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma+\nu}{\nu\sigma} \left[\theta - \frac{\sigma x + \nu\mu}{\sigma+\nu}\right]^2 + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma+\nu}\right)\right] d\theta \\ &= \frac{\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2(\sigma+\nu)}\right]}{2\pi\sqrt{\nu\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma+\nu}{\nu\sigma} \left[\theta - \frac{\sigma x + \nu\mu}{\sigma+\nu}\right]^2\right)\right] d\theta \\ &= \frac{\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2(\sigma+\nu)}\right]}{\sqrt{2\pi(\nu+\sigma)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\sigma+\nu}{\sigma\nu}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma+\nu}{\nu\sigma} \left[\theta - \frac{\sigma x + \nu\mu}{\sigma+\nu}\right]^2\right)\right] d\theta. \end{aligned}$$

Wyrażenie pod powyższą całką to gęstość rozkładu normalnego $N\left(\frac{\sigma x + \nu\mu}{\sigma+\nu}, \frac{\sigma\nu}{\sigma+\nu}\right)$. Zatem całka wynosi 1. Po przekształceniu otrzymujemy

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\nu+\sigma)}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2(\sigma+\nu)}\right],$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Jest to gęstość rozkładu normalnego $N(\mu, \nu + \sigma)$. □

Przykład 1.9 (Weibull-Wykładniczy). Załóżmy, że $X|\Lambda$ ma rozkład Weibulla z parametrami $\frac{1}{\sqrt[k]{\lambda}}$ i k , natomiast Λ ma rozkład wykładniczy z parametrem θ^k . Wtedy mieszanką tych rozkładów jest rozkład log-logistyczny $LL(\theta, k)$.

Rozwiązanie. Gęstość zmiennej losowej $X|\Lambda$ o rozkładzie Weibulla $Wei(\frac{1}{\sqrt[k]{\lambda}}, k)$ wyraża się wzorem

$$f_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \lambda k x^{k-1} e^{-\lambda x^k},$$

gdzie $x \geq 0$ i $\lambda, k > 0$. Zatem gęstość mieszanki jest zadana wzorem

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty \lambda k x^{k-1} e^{-\lambda x^k} \theta^k e^{-\theta^k \lambda} d\lambda \\ &= k \theta^k x^{k-1} \int_0^\infty \lambda \exp[-\lambda(x^k + \theta^k)] d\lambda \\ &= k \theta^k x^{k-1} \int_0^\infty \lambda \left(\frac{-1}{x^k + \theta^k} \exp[-\lambda(x^k + \theta^k)] \right)' d\lambda \\ &= k \theta^k x^{k-1} \left(\frac{-\lambda}{x^k + \theta^k} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{x^k + \theta^k} \exp[-\lambda(x^k + \theta^k)] d\lambda \right) \quad (1.10) \\ &= k \theta^k x^{k-1} \int_0^\infty \frac{1}{x^k + \theta^k} \exp[-\lambda(x^k + \theta^k)] d\lambda \\ &= k \theta^k x^{k-1} \frac{1}{(x^k + \theta^k)^2} \int_0^\infty (x^k + \theta^k) \exp[-\lambda(x^k + \theta^k)] d\lambda. \end{aligned}$$

W wyrażeniu (1.10) zastosowaliśmy całkowanie przez części. Wyrażenie pod ostatnią całką jest gęstością rozkładu wykładniczego z parametrem $x^k + \theta^k$, czyli całka wynosi 1. Zatem

$$f_X(x) = \frac{k \theta^k x^{k-1}}{(x^k + \theta^k)^2} = \frac{\frac{k}{\theta} \theta^{2k} (\frac{x}{\theta})^{k-1}}{\theta^{2k} ((\frac{x}{\theta})^k + 1)^2} = \frac{k (\frac{x}{\theta})^{k-1}}{\theta ((\frac{x}{\theta})^k + 1)^2}.$$

Otrzymana gęstość mieszanki rozkładów jest gęstością rozkładu log-logistycznego z parametrem skali θ i parametrem kształtu k . □

Przykład 1.10 (Poisson-Gamma). Rozważmy zmienną losową $X|\Theta$ o rozkładzie Poissona ze średnią θ oraz zmienną Θ o rozkładzie gamma z parametrami α i β . Mieszanką tych rozkładów jest rozkład ujemny dwumianowy.

Rozwiązanie. Zmienna $X|\Theta$ o rozkładzie $Poi(\Theta = \theta)$ ma następującą funkcję prawdopodobieństwa

$$\mathbb{P}(X = x|\Theta = \theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!},$$

gdzie $x \in \mathbb{N}, \theta > 0$. Funkcja prawdopodobieństwa mieszanki wyraża się następującym

wzorem

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X = x) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X = x | \Theta = \theta) h_\Theta(\theta) d\theta \\
 &= \int_0^\infty \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} d\theta \\
 &= \frac{\beta^\alpha}{x! \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \theta^{x+\alpha-1} e^{-(\beta+1)\theta} d\theta \\
 &= \frac{\beta^\alpha}{x! \Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(x+\alpha)}{(\beta+1)^{x+\alpha}} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(x+\alpha)} (\beta+1)^{x+\alpha} \theta^{x+\alpha-1} e^{-(\beta+1)\theta} d\theta.
 \end{aligned}$$

Wyrażenie pod całką to gęstość rozkładu $\text{Gamma}(x + \alpha, \beta + 1)$. Zatem

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X = x) &= \frac{\beta^\alpha}{x! \Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(x+\alpha)}{(\beta+1)^{x+\alpha}} \\
 &= \frac{\Gamma(x+\alpha)}{x! \Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{\beta+1} \right)^\alpha \left(\frac{1}{\beta+1} \right)^x,
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

gdzie $x \in \mathbb{N}$. Otrzymana funkcja prawdopodobieństwa jest funkcją rozkładu ujemnego dwumianowego. Jeśli parametr α jest dodatnią liczbą całkowitą, to tę funkcję prawdopodobieństwa możemy uprościć przekształcając w (1.11) fragment z funkcją gamma:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[X = x] &= \frac{\Gamma(x+\alpha)}{x! \Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{\beta+1} \right)^\alpha \left(\frac{1}{\beta+1} \right)^x \\
 &= \frac{(x+\alpha-1)!}{x! (\alpha-1)!} \left(\frac{\beta}{\beta+1} \right)^\alpha \left(\frac{1}{\beta+1} \right)^x \\
 &= \binom{x+\alpha-1}{x} \left(\frac{\beta}{\beta+1} \right)^\alpha \left(\frac{1}{\beta+1} \right)^x,
 \end{aligned}$$

gdzie $x \in \mathbb{N}$. □

Przykład 1.11 (Gamma-Geometryczny). *Załóżmy, że zmienna losowa $X|Y$ ma rozkład gamma z parametrami α (dodatnia liczba całkowita) i β (znana stała). Przypuśćmy, że parametr α jest realizacją zmiennej losowej Y o rozkładzie geometrycznym z funkcją prawdopodobieństwa*

$$\mathbb{P}[Y = \alpha] = p(1-p)^{\alpha-1},$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p \in (0, 1)$. Mieszanką tych rozkładów jest rozkład wykładniczy z parametrem βp .

Rozwiązanie. Gęstość zmiennej $X|Y$ wyraża się wzorem

$$f_{X|Y}(x|\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x} = \frac{1}{(\alpha-1)!} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}.$$

Natomiast funkcją gęstości mieszanki jest

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} f(x|\alpha)\mathbb{P}[Y = \alpha] \\
 &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha-1)!} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x} p(1-p)^{\alpha-1} \\
 &= \beta p e^{-\beta x} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{[\beta(1-p)x]^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \\
 &= \beta p e^{-\beta x} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{[\beta(1-p)x]^\alpha}{\alpha!}.
 \end{aligned}$$

Korzystając z faktu, że

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

otrzymujemy

$$f_X(x) = \beta p e^{-\beta x} e^{\beta(1-p)x} = \beta p e^{-(\beta p)x}.$$

Powyższa funkcja gęstości mieszanki jest funkcją gęstości rozkładu wykładniczego z parametrem βp .

□

Dzięki mieszankom możemy otrzymywać znane do tej pory i powszechnie używane rozkłady, ale również tworzyć nowe. Mogą one znaleźć zastosowanie w różnych dziedzinach, np. w matematyce ubezpieczeniowej, gdzie modelujemy zjawisko, które w rzeczywistości jest kilkoma innymi zjawiskami występującymi z nieznanym prawdopodobieństwem.

W kolejnym rozdziale zajmiemy się szczególnym przykładem rozkładu Weibulla, którego otrzymamy z mieszanki rozkładów ciągłych. Następnie wyznaczymy dla niego różne miary ryzyka.

2 Rozkład Weibulla

Rozkład Weibulla szczegółowo opisany w [12] jest niezwykle interesujący dla statystyków i praktyków ze względu na jego zdolność do dopasowania się do danych z różnych dziedzin, od danych dotyczących długości życia po dane pogodowe lub obserwacje dokonywane w ekonomii i administracji biznesowej, w hydrologii, biologii i naukach technicznych. Rozkład ten jest często stosowany w analizie przeżycia podczas modelowania sytuacji, gdy prawdopodobieństwo awarii czy śmierci zmienia się w czasie.

Definicja 2.1. *Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład Weibulla $Wei(\lambda, \tau)$ z parametrem skali $\lambda > 0$ i kształtu $\tau > 0$ wtedy, gdy jej funkcja gęstości prawdopodobieństwa wyrażona jest wzorem*

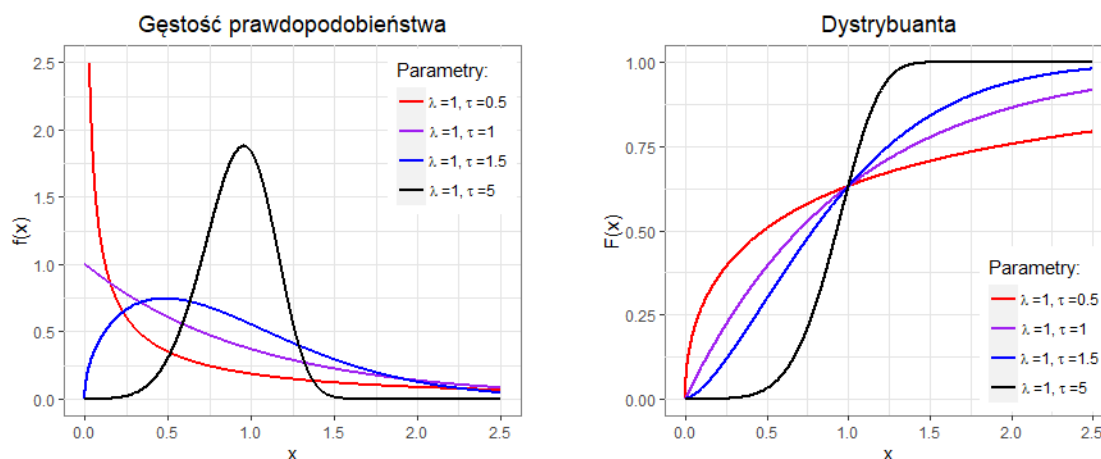
$$f(x) = \frac{\tau}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\tau-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\tau\right)$$

dla $x \geq 0$, a dystrybuanta zadana wzorem

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\tau\right)$$

określona jest dla $x \geq 0$.

Uwaga 2.2. *W zależności od parametrów, rozkład Weibulla może przypominać rozkład normalny (dla dużych wartości τ) oraz rozkład wykładniczy (gdy $\tau = 1$), lub być rozkładem ciężkoogonowym (gdy $\tau \in (0, 1)$), co możemy zaobserwować na poniższych wykresach gęstości prawdopodobieństwa oraz dystrybuanty.*



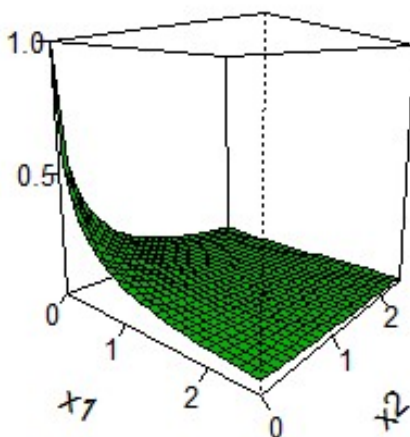
Rysunek 1. Wykresy gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanty rozkładu Weibulla dla różnych parametrów.

W literaturze np. w [9] czy w [8] przedstawiony jest wielowymiarowy rozkład Weibulla zdefiniowany następująco:

Definicja 2.3. Mówimy, że wektor losowy (X_1, \dots, X_n) ma wielowymiarowy rozkład Weibulla, gdy ogon dystrybuanty wyraża się wzorem

$$\bar{F}(x_1, \dots, x_n) = \exp \left\{ - \left[\left(\frac{x_1}{\lambda_1} \right)^{\frac{\gamma_1}{\alpha}} + \left(\frac{x_2}{\lambda_2} \right)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} + \dots + \left(\frac{x_n}{\lambda_n} \right)^{\frac{\gamma_n}{\alpha}} \right]^\alpha \right\},$$

gdzie $\alpha \in (0, 1]$, $\lambda_i \in (0, \infty)$, $\gamma_i \in (0, \infty)$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.



Rysunek 2. Ogon dwuwymiarowego rozkładu Weibulla dla $k = 2$.

Na rysunku 2 możemy zobaczyć jak wygląda ogon dystrybuanty dwuwymiarowego rozkładu Weibulla z parametrami $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_i = \frac{1}{k^2}$, $\gamma_i = \frac{1}{2}$ dla każdego $i \in \{1, 2\}$ oraz dla $k = 2$.

W dalszej części pracy skupimy się głównie na rozkładzie Weibulla $Wei(k^{-2}, \frac{1}{2})$. Ten model jest interesujący ze względu na to, że można otrzymać go z mieszanki dwóch innych rozkładów. W tym celu zdefiniujemy najpierw klasę rozkładów Lévy'ego, będących szczególnym przypadkiem rozkładu stabilnego.

Definicja 2.4. Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład Lévy'ego $Lévy(\mu, c)$ z parametrem położenia $\mu \in \mathbb{R}$ i skali $c > 0$ wtedy, gdy jej funkcja gęstości prawdopodobieństwa wyraża się wzorem

$$f(x) = \sqrt{\frac{c}{2\pi(x-\mu)^3}} \exp\left(\frac{-c}{2(x-\mu)}\right),$$

gdzie $x \geq \mu$.

Uwaga 2.5. Rozkład Lévy'ego $Lévy(\mu, c)$ jest specjalnym przypadkiem rozkładu stabilnego $Stable(\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1, c, \mu)$. Parametry w rozkładzie stabilnym to kolejno parametr stabilności, skośności, skali i położenia.

Fakt 2.6. Rozkład Weibulla $Wei(k^{-2}, \frac{1}{2})$ można otrzymać z mieszanki rozkładu wykładniczego $Exp(\theta)$ z rozkładem Lévy'ego $Lévy(0, \frac{k^2}{2})$.

Uwaga 2.7. W fakcie 2.6 intuicyjne byłoby użycie rozkładu Lévy(0, c). Wtedy otrzymalibyśmy rozkład $\text{Wei}(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2})$. Natomiast dla przejrzystości rachunków w dowodzie Faktu 2.8 oraz w kolejnym rozdziale użyjemy stałej $c = \frac{k^2}{2}$.

Okazuje się, że prawdziwa jest również ogólniejsza wersja Faktu 2.6.

Fakt 2.8. Wielowymiarowy rozkład Weibulla można otrzymać z mieszanki wielowymiarowego rozkładu wykładniczego z rozkładem Lévy'ego.

Dowód Faktu 2.8. Udowodnimy ten fakt wyznaczając ogon dystrybuanty mieszanki wielowymiarowego rozkładu wykładniczego z parametrem θ wraz z rozkładem Lévy'ego $\text{Lévy}(0, \frac{k^2}{2})$. Będzie wyrażał się on wzorem

$$\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_0^\infty e^{-\theta(x_1+\dots+x_n)} \frac{k}{2\sqrt{\pi}\theta^3} e^{-\frac{k^2}{4\theta}} d\theta,$$

gdzie $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ oraz $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Dla przejrzystości rachunków oznaczmy $a = x_1 + \dots + x_n$ oraz $b = \frac{k^2}{4}$. Wtedy

$$\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{k}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \theta^{-\frac{3}{2}} e^{-\theta a - \frac{b}{\theta}} d\theta. \quad (2.1)$$

Oznaczmy w powyższym wyrażeniu (2.1) całkę jako I i zróbmy podstawienie $y = \sqrt{\frac{b}{a}}\theta^{-\frac{1}{2}}$. Wtedy

$$dy = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{a}} \theta^{-\frac{3}{2}} d\theta,$$

równoważnie

$$-2\sqrt{\frac{a}{b}} dy = \theta^{-\frac{3}{2}} d\theta.$$

Mamy zatem

$$I = 2\sqrt{\frac{a}{b}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{ab}(y^2+y^{-2})} dy.$$

Zapiszmy I jako sumę dwóch całek

$$I = 2\sqrt{\frac{a}{b}} \left(\int_0^1 e^{-\sqrt{ab}(y^2+y^{-2})} dy + \int_1^\infty e^{-\sqrt{ab}(y^2+y^{-2})} dy \right).$$

Podstawiając $y = \frac{1}{x}$ w pierwszej całce oraz $y = x$ w drugiej, otrzymujemy

$$\begin{aligned} I &= 2\sqrt{\frac{a}{b}} \left(\int_1^\infty \frac{1}{x^2} e^{-\sqrt{ab}(x^{-2}+x^2)} dx + \int_1^\infty e^{-\sqrt{ab}(x^2+x^{-2})} dx \right) \\ &= 2\sqrt{\frac{a}{b}} \int_1^\infty \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) e^{-\sqrt{ab}(x^{-2}+x^2)} dx \\ &= 2\sqrt{\frac{a}{b}} \int_1^\infty \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) e^{-\sqrt{ab}\left((x-\frac{1}{x})^2+2\right)} dx. \end{aligned}$$

Wykonajmy jeszcze jedno podstawienie $z = x - \frac{1}{x}$, czyli mamy $dz = 1 + \frac{1}{x^2}dx$. Otrzymujemy wtedy

$$\begin{aligned} I &= 2\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{ab}(z^2+2)} dz \\ &= 2\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \int_0^\infty e^{-2\sqrt{ab}} e^{-\sqrt{ab}z^2} dz \\ &= 2\sqrt[4]{\frac{a}{b}} e^{-2\sqrt{ab}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{ab}z^2} dz. \end{aligned}$$

Powyższe wyrażenie można przekształcić w taki sposób, aby otrzymać pod całką gęstość rozkładu normalnego. Zatem

$$I = 2\sqrt[4]{\frac{a}{b}} e^{-2\sqrt{ab}} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{ab}} \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{ab}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{\frac{1}{\sqrt{ab}}}} dz.$$

Pod całką jest gęstość rozkładu normalnego $N(0, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{ab}})$, czyli wartość całki to $\frac{1}{2}$. Otrzymujemy więc

$$I = 2\sqrt[4]{\frac{a}{b}} e^{-2\sqrt{ab}} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{ab}} \sqrt{2\pi} \frac{1}{2} = \sqrt[4]{\frac{a}{b}} e^{-2\sqrt{ab}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{ab}} = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-2\sqrt{ab}}.$$

Wracając do wzoru (2.1) na ogon dystrybuanty i podstawiając wartości I, a oraz b , otrzymujemy

$$\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{k}{2\sqrt{\pi}} I = \frac{k}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-2\sqrt{ab}} = \frac{k}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{\frac{k^2}{4}}} e^{-2\sqrt{\frac{k^2}{4}} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{2}}} = e^{-k \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Otrzymany z powyższych rachunków ogon dystrybuanty mieszanki

$$\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \exp\left(-k \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

to ogon dystrybuanty wielowymiarowego rozkładu Weibulla. □

Uwaga 2.9. Rozkład wyznaczony w dowodzie Faktu 2.8 jest szczególnym przypadkiem wielowymiarowego rozkładu Weibulla, który w ogólności w literaturze definiowany jest tak, jak w Definicji 2.3. Podstawiając parametry $\lambda_i = \frac{1}{k^2}, \alpha = \frac{1}{2}, \gamma_i = \frac{1}{2}$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ w Definicji 2.3, otrzymamy ogon dystrybuanty wielowymiarowego rozkładu Weibulla, który został wyznaczony w dowodzie Faktu 2.8.

Uwaga 2.10. Możemy zauważyć, że dowód Faktu 2.6 przebiegałby analogicznie jak dowód Faktu 2.8, ponieważ na dowód nie miał wpływu fakt, że używaliśmy wielowymiarowego rozkładu wykładniczego. Gdy $n = 1$, czyli używamy jednowymiarowego rozkładu wykładniczego otrzymujemy, że

$$\bar{F}_X(x) = e^{-k\sqrt{x}},$$

co jest ogonem dystrybuanty rozkładu Weibulla $Wei(k^{-2}, \frac{1}{2})$.

3 Miary ryzyka

Na początku musimy zdefiniować czym właściwie jest ryzyko. Jak czytamy w monografii [5] ryzyko można opisać jako zdarzenie, które może mieć miejsce lub nie, a więc jest to zdarzenie losowe, oraz które powoduje pewne niekorzystne konsekwencje finansowe. Jest to centralne pojęcie matematyki aktuarialnej. Ryzyko zawsze zawiera jakiś element niepewności np. moment jego wystąpienia, czy w ogóle wystąpi lub jak duże skutki spowoduje (np. w przypadku ubezpieczeń komunikacyjnych). Formalna definicja ryzyka z punktu widzenia ubezpieczeń, przedstawiona w [5], brzmi następująco:

Definicja 3.1. *Ryzykiem X nazywamy nieujemną zmienną losową reprezentującą losową ilość pieniędzy płaconą przez firmę ubezpieczeniową w celu wypłaty odszkodowania ubezpieczonemu lub osobie trzeciej.*

W zamian za ubezpieczenie, ubezpieczyciel otrzyma składki. Aktualnie rynek oferuje nam możliwość kupowania i sprzedawania ryzyka, tak jakby to było dobro materialne. Banki i firmy ubezpieczeniowe są skłonne kupować ryzyko po określonych cenach, które odzwierciedlają ich zagrożenie. Powstały zatem różne metody do pomiaru ryzyka.

Definicja 3.2. *Miarą ryzyka nazywamy funkcję ρ , która odwzorowuje ryzyko X na nieujemną liczbę rzeczywistą $\rho[X]$ (dopuszczamy nieskończoność) reprezentującą dodatkową gotówkę, która musi być dodana do X , aby ryzyko było akceptowalne.*

Duże wartości $\rho[X]$ mówią nam, że X jest niebezpieczny. Miary ryzyka są używane np. do określania rezerw i wymogów kapitałowych w celu uniknięcia niewypłacalności.

W tym rozdziale zaprezentujemy kilka miar ryzyka i policzymy je dla rozkładu Weibulla w modelu jednowymiarowym oraz wielowymiarowym.

3.1 Miary ryzyka dla rozkładów jednowymiarowych

Przykłady oraz szczegółowy opis miar ryzyka wraz z ich własnościami dla rozkładów jednowymiarowych możemy odnaleźć w [7] oraz w [5]. Miary ryzyka powstawały w różnych obszarach zastosowań, co doprowadziło do niejednoznaczności ich nazw. Np. Tail Value-at-Risk (TVaR) w różnych źródłach jest również nazywany Conditional Tail Expectation (CTE), Tail Conditional Expectation (TCE), czy Expected Shortfall (ES). W tym rozdziale będą zdefiniowane miary ryzyka powiązane z TVaR, których nazwy i definicje są zgodne z definicjami w [5].

Uwaga 3.3. *W poniższych definicjach p oznacza poziom prawdopodobieństwa, $p \in (0, 1)$.*

Value-at-Risk (wartość zagrożona) jest standardową miarą ryzyka używaną do oceny narażenia na ryzyko. Jest to kwota kapitału wymagana do zapewnienia, z wysokim ustalonym prawdopodobieństwem, że instytucja nie stanie się niewypłacalna. VaR pomoże nam również odpowiedzieć na pytanie: "Ile możemy stracić w ciągu jednego dnia/miesiąca/roku z określonym prawdopodobieństwem?". Na przykład, gdy X jest zagrożonym ryzykiem strat firmy ubezpieczeniowej, to wtedy $VaR_p(X)$ jest wielkością

kapitału, którym musi dysponować firma, aby z prawdopodobieństwem p była zapewniona płatność wszystkich roszczeń.

Definicja 3.4. *Miarę ryzyka VaR (Value-at-Risk), oznaczaną przez $VaR_p(X)$, definiujemy jako*

$$VaR_p(X) = F_X^{-1}(p).$$

Przykład 3.5. *Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie $Wei(\lambda, \tau)$. Policzmy teraz $VaR_p(X)$. Wiemy z definicji, że będzie to $VaR_p(X) = F_X^{-1}(p)$, gdzie*

$$F_X(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\tau\right). \quad (3.1)$$

Zatem

$$F_X(VaR_p(X)) = p.$$

Ze wzoru (3.1) otrzymujemy

$$1 - \exp\left(-\left(\frac{VaR_p(X)}{\lambda}\right)^\tau\right) = p.$$

Równoważnie

$$\left(\frac{VaR_p(X)}{\lambda}\right)^\tau = -\log(1 - p).$$

Ostatecznie mamy

$$VaR_p(X) = \lambda(-\log(1 - p))^{\frac{1}{\tau}}.$$

□

Wniosek 3.6. *Dla zmiennej losowej Z o rozkładzie $Wei(k^{-2}, \frac{1}{2})$ otrzymujemy*

$$VaR_p(Z) = \frac{(-\log(1 - p))^2}{k^2}.$$

Jednak VaR nie opisuje nam zachowania ogona ryzyka poza progiem VaR . Bardziej użyteczną miarą jest Tail Value-at-Risk (ogonowa wartość zagrożona), która uśrednia nam wszystkie wartości VaR powyżej poziomu bezpieczeństwa p . VaR dotyczył prawdopodobieństwa wystąpienia rzadkich i ekstremalnych zdarzeń oraz ryzyka jakie jest z nimi związane, natomiast $TVaR$ będzie nas informował o ryzyku, gdy te ekstremalne zdarzenia już wystąpią. Pozwala nam to odpowiedzieć na pytanie: "Jeśli sprawy przybiorą zły obrót, jakich strat może spodziewać się firma?".

Definicja 3.7. *Miarę ryzyka $TVaR$ (Tail Value-at-Risk), oznaczaną przez $TVaR_p(X)$, definiujemy jako*

$$TVaR_p(X) = \frac{1}{1 - p} \int_p^1 VaR_t(X) dt.$$

Przykład 3.8. Niech Z będzie zmienną losową o rozkładzie $Wei(k^{-2}, \frac{1}{2})$. Policzmy teraz $TVaR_p(Z)$. W poprzednim przykładzie policzyliśmy $VaR_p(Z)$. Zatem, zgodnie z definicją, mamy

$$\begin{aligned} TVaR_p(Z) &= \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR_t(X) dt \\ &= \frac{1}{1-p} \int_p^1 \frac{(-\log(1-t))^2}{k^2} dt \\ &= \frac{1}{(1-p)k^2} \int_p^1 \log^2(1-t) dt. \end{aligned}$$

Zastosujemy teraz podstawienie $x = 1 - t$

$$TVaR_p(Z) = \frac{1}{(1-p)k^2} \int_0^{1-p} \log^2(x) dx. \quad (3.2)$$

Wyznamy najpierw całkę nieoznaczoną z wyrażenia (3.2) całkując ją dwa razy przez części

$$\begin{aligned} \int \log^2(x) dx &= \int (x)' \log^2(x) dx = x \log^2(x) - \int 2x \log(x) \frac{1}{x} dx \\ &= x \log^2(x) - 2 \int \log(x) dx = x \log^2(x) - 2 \int (x)' \log(x) dx \\ &= x \log^2(x) - 2 \left(x \log(x) - \int x \frac{1}{x} dx \right) \\ &= x \log^2(x) - 2x \log(x) + 2x + C. \end{aligned}$$

Teraz wyznaczamy wartość całki oznaczonej i otrzymujemy

$$\begin{aligned} TVaR_p(Z) &= \frac{1}{(1-p)k^2} (x \log^2(x) - 2x \log(x) + 2x) \Big|_0^{1-p} \\ &= \frac{1}{(1-p)k^2} (1-p)(\log^2(1-p) - 2 \log(1-p) + 2) \\ &= \frac{1}{k^2} (\log^2(1-p) - 2 \log(1-p) + 2). \end{aligned}$$

□

Fakt 3.9. Dla każdego $p \in (0, 1)$ zachodzi

$$TVaR_p(X) \geq VaR_p(X).$$

Dowód. Zgodnie z Definicją 3.7

$$TVaR_p(X) = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR_t(X) dt.$$

Wiemy, że $VaR_p(X)$ jest funkcją niemalejącą, co wynika bezpośrednio z Definicji 3.4. Zatem

$$\frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR_t(X) dt \geq \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR_p(X) dt = \frac{VaR_p(X)}{1-p} \int_p^1 dt = VaR_p(X).$$

Otrzymaliśmy więc, że

$$TVaR_p(X) \geq VaR_p(X).$$

□

Conditional Tail Expectation (CTE) przedstawia nam warunkową oczekiwaną stratę zakładając, że przekracza ona wartość VaR. Jest to nic innego jak matematyczna transkrypcja TVaR. CTE zapewnia nam amortyzację przed średnią wartością straty przekraczającej wartość VaR.

Definicja 3.10. *Miarę ryzyka CTE (Conditional Tail Expectation), oznaczaną przez $CTE_p(X)$, definiujemy jako*

$$CTE_p(X) = \mathbb{E}[X|X > VaR_p(X)] = \frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{(X > VaR_p(X))}]}{\mathbb{P}[X > VaR_p(X)]} = \frac{\int_{VaR_p(X)}^{\infty} x f_X(x) dx}{1 - F_X(VaR_p(X))}.$$

Przykład 3.11. *Niech Z będzie zmienną losową o rozkładzie $Wei(k^{-2}, \frac{1}{2})$. Obliczmy teraz $CTE_p(Z)$. Przypomnijmy, że gęstość Z to $f_Z(t) = \frac{k}{2\sqrt{t}} \exp(-k\sqrt{t})$. Zatem, korzystając ze wzoru z Definicji 3.10, mamy*

$$\begin{aligned} CTE_p(Z) &= \frac{\int_{VaR_p(Z)}^{\infty} t f_Z(t) dt}{1 - F_Z(VaR_p(Z))} \\ &= \frac{1}{1-p} \int_{\frac{(-\log(1-p))^2}{k^2}}^{\infty} t \frac{k}{2\sqrt{t}} e^{-k\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{1}{1-p} \int_{\frac{(-\log(1-p))^2}{k^2}}^{\infty} \frac{k}{2} \sqrt{t} e^{-k\sqrt{t}} dt. \end{aligned}$$

Zastosujemy teraz podstawienie $x = k\sqrt{t}$ i otrzymujemy

$$CTE_p(Z) = \frac{1}{1-p} \int_{-\log(1-p)}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^2 e^{-x} dx = \frac{1}{(1-p)k^2} \int_{-\log(1-p)}^{\infty} x^2 e^{-x} dx. \quad (3.3)$$

Do obliczenia powyższej całki musimy dwa razy zastosować wzór na całkowanie przez części. Wyznamy najpierw całkę nieoznaczoną

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x} dx &= \int x^2 (-e^{-x})' dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx \\ &= -x^2 e^{-x} + 2(-x e^{-x} + \int e^{-x} dx) \\ &= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C. \end{aligned}$$

Obliczamy wartość całki oznaczonej (3.3) i otrzymujemy

$$\begin{aligned} CTE_p(Z) &= \frac{1}{(1-p)k^2} [-e^{-x}(x^2 + 2x + 2)] \Big|_{-\log(1-p)}^{\infty} \\ &= \frac{1}{(1-p)k^2} (1-p)(\log^2(1-p) - 2\log(1-p) + 2) \\ &= \frac{1}{k^2} (\log^2(1-p) - 2\log(1-p) + 2). \end{aligned}$$

□

Uwaga 3.12. Z powyższych przykładów widać, że $TVaR_p(Z) = CTE_p(Z)$ dla każdego $p \in (0, 1)$. Ogólniej, jeśli dystrybuanta zmiennej losowej Z jest ciągła to CTE i TVaR przyjmują te same wartości dla wszystkich p z przedziału $(0, 1)$.

Conditional Value-at-Risk (CVaR), zwany również Mean Excess, jest często używany w określaniu ryzyka przy ubezpieczeniach na życie.

Definicja 3.13. Miarę ryzyka CVaR (Conditional Value-at-Risk), oznaczaną przez $CVaR_p(X)$, definiujemy jako

$$CVaR_p(X) = \mathbb{E}[X - VaR_p(X) | X > VaR_p(X)] = CTE_p(X) - VaR_p(X).$$

Jak widzimy w powyższej definicji, CVaR to nic innego jak różnica między CTE (czy TVaR) a VaR, które są określone na tym samym poziomie prawdopodobieństwa p .

Przykład 3.14. Dla zmiennej losowej Z z rozkładu $Wei(k^{-2}, \frac{1}{2})$ mamy

$$\begin{aligned} CVaR_p(Z) &= \frac{1}{k^2} (\log^2(1-p) - 2\log(1-p) + 2) - \frac{(-\log(1-p))^2}{k^2} \\ &= \frac{-2}{k^2} (\log(1-p) - 1). \end{aligned}$$

□

Expected Shortfall (ES), zwana również transformacją Stop-Loss na poziomie VaR, wskazuje nam kwotę, jakiej strata rynkowa nie powinna przekroczyć w pewnym okresie.

Definicja 3.15. Miarę ryzyka ES (Expected Shortfall), oznaczaną przez $ES_p(X)$, definiujemy jako

$$ES_p(X) = \mathbb{E}[(X - VaR_p(X))_+].$$

W kolejnych rachunkach wielokrotnie będzie wykorzystywana ta sama całka. Wyznaczmy tę całkę w poniższym lemacie. Dzięki temu, przyszłe rachunki będą bardziej przejrzyste.

Lemat 3.16. Załóżmy, że $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $b \in \mathbb{R}_+$. Wtedy

$$\int e^{-a\sqrt{x+b}} dx = \frac{-2}{a^2} e^{-a\sqrt{x+b}} (a\sqrt{x+b} + 1) + C.$$

Dowód. Chcąc policzyć następującą całkę

$$\int e^{-a\sqrt{x+b}} dx,$$

na początku wykonujemy podstawienie $\sqrt{x+b} = y$. Otrzymujemy zatem

$$\frac{1}{2\sqrt{x+b}} dx = dy,$$

równoważnie możemy zapisać

$$dx = 2y dy.$$

Mamy

$$\int e^{-a\sqrt{x+b}} dx = \int 2ye^{-ay} dy.$$

Powyższą całkę policzymy przez części. Mamy zatem

$$\begin{aligned} \int 2ye^{-ay} dy &= 2 \int y \left(\frac{-1}{a} e^{-ay} \right)' dy \\ &= 2 \left(\frac{-y}{a} e^{-ay} - \int \frac{-1}{a} e^{-ay} dy \right) \\ &= 2 \left(\frac{-y}{a} e^{-ay} - \frac{1}{a^2} e^{-ay} \right) \\ &= \frac{-2}{a^2} e^{-ay} (ay + 1) + C. \end{aligned}$$

Wykonujemy początkowe podstawienie $\sqrt{x+b} = y$ i otrzymujemy

$$\int e^{-a\sqrt{x+b}} dx = \frac{-2}{a^2} e^{-a\sqrt{x+b}} (a\sqrt{x+b} + 1) + C.$$

□

Przykład 3.17. Dla zmiennej losowej Z z rozkładu $Wei(k^{-2}, \frac{1}{2})$ mamy

$$\begin{aligned} ES_p(Z) &= \int_0^\infty \overline{F_Z}(t + VaR_p(Z)) dt \\ &= \int_0^\infty \exp\left(-k\sqrt{t + VaR_p(Z)}\right) dt. \end{aligned}$$

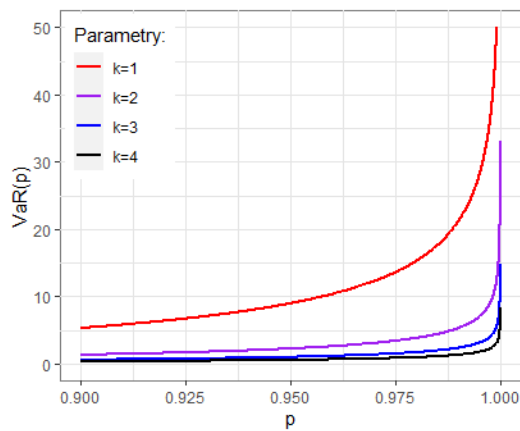
Powyższą całkę obliczamy używając Lematu 3.16. Mamy zatem

$$ES_p(Z) = \frac{-2}{k^2} \exp\left(-k\sqrt{t + VaR_p(Z)}\right) \left(k\sqrt{t + VaR_p(Z)} + 1\right) \Bigg|_0^\infty$$

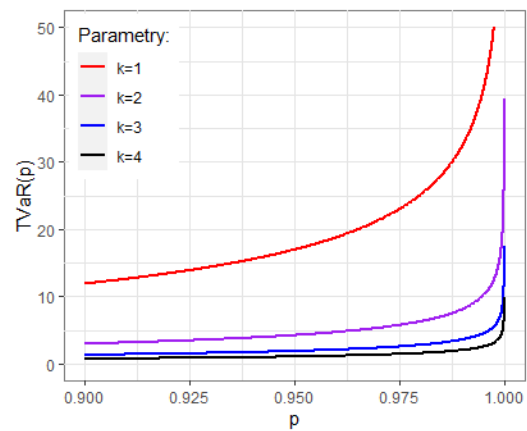
$$\begin{aligned}
&= 0 - \frac{-2}{k^2} \exp\left(-k\sqrt{\text{VaR}_p(Z)}\right) \left(k\sqrt{\text{VaR}_p(Z)} + 1\right) \\
&= \frac{2}{k^2} \exp\left(-k\frac{-\log(1-p)}{k}\right) \left(k\frac{-\log(1-p)}{k} + 1\right) \\
&= \frac{-2(1-p)}{k^2} (\log(1-p) - 1).
\end{aligned}$$

□

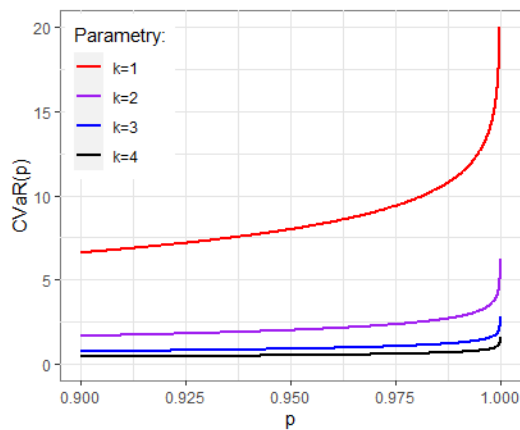
Przeanalizujemy teraz wykresy miar ryzyka, zdefiniowanych w tym rozdziale, dla rozkładu Weibulla $Wei(k^{-2}, \frac{1}{2})$ z różnymi parametrami w zależności od $p \in (0.9, 1)$.



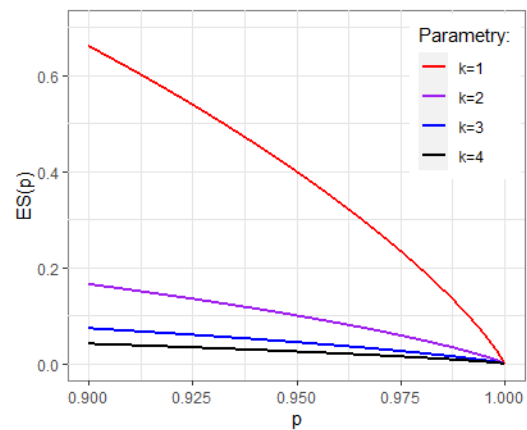
(a) VaR dla rozkładu $Wei(k^2, \frac{1}{2})$



(b) TVaR dla rozkładu $Wei(k^2, \frac{1}{2})$



(c) CVaR dla rozkładu $Wei(k^2, \frac{1}{2})$



(d) ES dla rozkładu $Wei(k^2, \frac{1}{2})$

Rysunek 3. Wykresy miar ryzyka dla rozkładu Weibulla z różnymi parametrami w zależności od $p \in (0.9, 1)$.

Z wykresów 3a i 3b wynika, że wraz ze wzrostem poziomu prawdopodobieństwa rośnie również wartość miar ryzyka VaR oraz TVaR. Można też myśleć o tym w następujący

sposób. Skoro wzrasta prawdopodobieństwo wypłacalności danej instytucji, oznacza to, że rośnie również kwota jaką musi ona posiadać, aby była w stanie zapewnić możliwość wypłat wszystkich roszczeń. Zatem zbliżając się do stuprocentowej pewności co do wypłacalności, kwota rośnie do nieskończoności. Ponieważ, aby instytucja była w każdej sytuacji wypłacalna, musi dysponować nieograniczonym kapitałem. Wykres 3c, pokazujący jak zachowuje się CVaR wraz ze wzrostem p , również posiada analogiczną interpretację. Dzięki wiedzy, że CVaR jest różnicą między TVaR a VaR oraz własności przedstawionej w Fakcie 3.9, kształt tego wykresu nie jest dla nas zaskakujący. Natomiast wykres 3d wskazuje na to, że im większe prawdopodobieństwo wypłacalności instytucji zakładamy, tym mniejszą możemy ponieść stratę w danym okresie. Zatem jeśli mamy stuprocentową pewność, że nasza instytucja jest wypłacalna, nie może ona ponosić wtedy żadnych strat. Powyższe wykresy są rozważane tylko dla $p \in (0.9, 1)$, ponieważ w praktyce miary ryzyka są wyliczane jedynie dla wartości p bliskich 1.

3.2 Miary ryzyka dla rozkładów dwuwymiarowych

W tym rozdziale przedstawimy opisane w [4] dwie miary ryzyka MME oraz MES dla rozkładów dwuwymiarowych. Te dwie miary wykorzystywane są w kontekście ryzyka zarażenia (ryzyka systemowego). Możemy myśleć o tym w następujący sposób. Załóżmy, że mamy wektor ryzyka (Z_1, Z_2) . Z_2 oznacza ryzyko całej instytucji, natomiast Z_1 jest jednym składnikiem ryzyka np. wybraną linią biznesową jaką prowadzi ta instytucja. Chcielibyśmy poznać sytuację tej konkretnej linii biznesowej, gdy cała instytucja jest w niebezpieczeństwie. Takie ryzyko zarażenia dotyczy każdego podmiotu zajmującego się ryzykiem na dużą skalę.

Nie należy doszukiwać się ścisłych analogii między nazwami miar dla rozkładów dwuwymiarowych i nazwami miar dla rozkładów jednowymiarowych. Są to pojęcia stosunkowo młode i ich nazwy nie zostały jeszcze usystematyzowane.

Definicja 3.18. *Założmy, że (Z_1, Z_2) jest wektorem losowym, a Z_1 jest całkowalną zmienną losową (tzn. $\mathbb{E}[|Z_1|] < \infty$). Marginal Mean Excess (MME) na poziomie p , gdzie $p \in (0, 1)$ definiujemy jako*

$$MME(p) = \mathbb{E}[(Z_1 - VaR_p(Z_2))_+ | Z_2 > VaR_p(Z_2)].$$

MME interpretujemy jako oczekiwaną nadwyżkę ryzyka Z_1 nad $VaR_p(Z_2)$ zakładając, że wartość Z_2 jest już większa niż ta sama wartość VaR.

Definicja 3.19. *Założmy, że (Z_1, Z_2) jest wektorem losowym, a Z_1 jest całkowalną zmienną losową (tzn. $\mathbb{E}[|Z_1|] < \infty$). Marginal Expected Shortfall (MES) na poziomie p , gdzie $p \in (0, 1)$ definiujemy jako*

$$MES(p) = \mathbb{E}[Z_1 | Z_2 > VaR_p(Z_2)].$$

MES interpretujemy jako oczekiwany niedobór jednego ryzyka, biorąc pod uwagę, że drugie ryzyko jest wyższe niż jego VaR.

Obie te wielkości są wskaźnikami zarażania ryzykiem i są przydatne w różnych zastosowaniach, od finansów, ubezpieczeń i ryzyka systemowego po ryzyko środowiskowe i klimatyczne.

Inną interpretację możemy znaleźć w [1] czy w [2]. Zakładamy, że instytucja prowadzi pewne dwie linie biznesowe, gdzie Z_1, Z_2 reprezentują ich ryzyka. Chcielibyśmy uzyskać informację o tym co dzieje się z pierwszą linią mając tylko informacje o linii drugiej.

Przykład 3.20. Niech (Z_1, Z_2) będzie wektorem losowym, którego łączny rozkład to dwuwymiarowy rozkład Weibulla o funkcji przeżycia

$$\bar{F}(x_1, x_2) = e^{-k\sqrt{x_1+x_2}}.$$

Rozkładem brzegowym Z_i jest rozkład Weibulla $Wei(k^{-2}, \frac{1}{2})$, którego ogon dystrybuanty wyraża się wzorem

$$\bar{G}_{Z_i}(x_i) = e^{-k\sqrt{x_i}},$$

gdzie $i = 1, 2$. Policzmy teraz MME dla tego wektora. Zgodnie z Definicją 3.18

$$\begin{aligned} MME(p) &= \mathbb{E}[(Z_1 - VaR_p(Z_2))_+ | Z_2 > VaR_p(Z_2)] \\ &= \int_{VaR_p(Z_2)}^{\infty} \frac{\mathbb{P}[Z_1 > x, Z_2 > VaR_p(Z_2)]}{\mathbb{P}[Z_2 > VaR_p(Z_2)]} dx \\ &= \frac{1}{\bar{G}_{Z_2}(VaR_p(Z_2))} \int_{VaR_p(Z_2)}^{\infty} \bar{F}(x, VaR_p(Z_2)) dx \\ &= \frac{1}{1-p} \int_{VaR_p(Z_2)}^{\infty} e^{-k\sqrt{x+VaR_p(Z_2)}} dx. \end{aligned}$$

Powyższą całkę obliczamy korzystając z Lematu 3.16 i otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\int_{VaR_p(Z_2)}^{\infty} e^{-k\sqrt{x+VaR_p(Z_2)}} dx \\ &= \frac{-2}{k^2} \exp\left(-k\sqrt{x+VaR_p(Z_2)}\right) \left(k\sqrt{x+VaR_p(Z_2)} + 1\right) \Big|_{VaR_p(Z_2)}^{\infty} \\ &= \frac{2}{k^2} \exp\left(-k\sqrt{2VaR_p(Z_2)}\right) \left(k\sqrt{2VaR_p(Z_2)} + 1\right) \\ &= \frac{2}{k^2} \exp\left(-k\sqrt{2} \frac{-\log(1-p)}{k}\right) \left(k\sqrt{2} \frac{-\log(1-p)}{k} + 1\right) \\ &= \frac{2}{k^2} (1-p)^{\sqrt{2}} \left(1 - \log(1-p)^{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} MME(p) &= \frac{1}{1-p} \frac{2}{k^2} (1-p)^{\sqrt{2}} \left(1 - \log(1-p)^{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{2}{k^2} (1-p)^{\sqrt{2}-1} \left(1 - \log(1-p)^{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

□

Przykład 3.21. W tym przykładzie policzmy MES dla takiego samego wektora (Z_1, Z_2) jak w poprzednim przykładzie. Zgodnie z Definicją 3.19 mamy

$$\begin{aligned} MES(p) &= \mathbb{E}[Z_1 | Z_2 > VaR_p(Z_2)] \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}[Z_2 > VaR_p(Z_2)]} \int_0^\infty \mathbb{P}[Z_1 > x, Z_2 > VaR_p(Z_2)] dx \\ &= \frac{1}{1-p} \int_0^\infty e^{-k\sqrt{x+VaR_p(Z_2)}} dx. \end{aligned}$$

Powyższa całka jest dokładnie taka sama, jaka powstaje przy obliczaniu $ES_p(Z_2)$. Zatem z Przykładu 3.17 oraz Lematu 3.16 otrzymujemy

$$\begin{aligned} MES(p) &= \frac{1}{1-p} \frac{-2(1-p)}{k^2} (\log(1-p) - 1) \\ &= \frac{2}{k^2} (1 - \log(1-p)). \end{aligned}$$

□

3.3 Miary ryzyka dla rozkładów wielowymiarowych

Definicje MME i MES możemy uogólnić dla przypadku wielowymiarowego. Zgodnie z interpretacją z [1] czy z [2] możemy myśleć, że instytucja posiada n linii biznesowych. Chcielibyśmy wywnioskować jakieś informacje o sytuacji jednej z tych linii, posiadając wiedzę tylko na temat pozostałych $n - 1$ linii. Chcemy się dowiedzieć jaki będzie oczekiwany niedobór lub nadwyżka ryzyka tej linii w przypadku, gdy pozostałe linie znajdują się w niebezpieczeństwie.

Definicja 3.22. Załóżmy, że (Z_1, \dots, Z_n) jest wektorem losowym, a Z_1 jest całkowalną zmienną losową (tzn. $\mathbb{E}[|Z_1|] < \infty$). Marginal Mean Excess (MME) na poziomie p , dla $p \in (0, 1)$ definiujemy jako

$$MME(p, n) = \mathbb{E}[(Z_1 - A_p)_+ | Z_2 > VaR_p(Z_2), \dots, Z_n > VaR_p(Z_n)],$$

gdzie

$$A_p = \sum_{i=2}^n VaR_p(Z_i).$$

Definicja 3.23. Załóżmy, że (Z_1, \dots, Z_n) jest wektorem losowym, a Z_1 jest całkowalną zmienną losową (tzn. $\mathbb{E}[|Z_1|] < \infty$). Marginal Expected Shortfall (MES) na poziomie p , dla $p \in (0, 1)$ definiujemy jako

$$MES(p, n) = \mathbb{E}[Z_1 | Z_2 > VaR_p(Z_2), \dots, Z_n > VaR_p(Z_n)].$$

Twierdzenie 3.24. Niech (Z_1, \dots, Z_n) będzie wektorem losowym, którego łączny rozkład to wielowymiarowy rozkład Weibulla z parametrami $\alpha = \frac{1}{2}, \lambda_i = \frac{1}{k^2}, \gamma_i = \frac{1}{2}$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, natomiast rozkładem brzegowym Z_i jest rozkład Weibulla $Wei(k^{-2}, \frac{1}{2})$. Wtedy

$$MME(p, n) = \frac{2}{k^2} (1 - \log(1 - p)) \sqrt{2(n-1)} (1 - p)^{(\sqrt{2}-1)\sqrt{n-1}}.$$

Dowód. Wiemy z Definicji 2.3, że (Z_1, \dots, Z_n) ma łączny rozkład o następującej funkcji przeżycia

$$\bar{F}(x_1, \dots, x_n) = e^{-k\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i}},$$

a ogon dystrybuanty brzegowego rozkładu to

$$\bar{G}_{Z_i}(x_i) = e^{-k\sqrt{x_i}}.$$

Będziemy liczyć MME dla tego wektora analogicznie jak w przypadku dwuwymiarowym. Mamy

$$\begin{aligned} MME(p, n) &= \mathbb{E}[(Z_1 - A_p)_+ | Z_2 > VaR_p(Z_2), \dots, Z_n > VaR_p(Z_n)] \\ &= \int_{A_p}^{\infty} \frac{\mathbb{P}[Z_1 > x, Z_2 > VaR_p(Z_2), \dots, Z_n > VaR_p(Z_n)]}{\mathbb{P}[Z_2 > VaR_p(Z_2), \dots, Z_n > VaR_p(Z_n)]} dx \\ &= \frac{1}{e^{-k\sqrt{A_p}}} \int_{A_p}^{\infty} e^{-k\sqrt{x+A_p}} dx. \end{aligned}$$

Powyzszą całkę liczymy używając Lematu 3.16 i otrzymujemy

$$\int_{A_p}^{\infty} e^{-k\sqrt{x+A_p}} dx = \frac{-2}{k^2} e^{-k\sqrt{A_p+x}} \left(k\sqrt{A_p+x} + 1 \right) \Big|_{A_p}^{\infty}.$$

Z Wniosku 3.6 wiemy również ile wynosi VaR dla zmiennej losowej o rozkładzie Weibulla $Wei(k^{-2}, \frac{1}{2})$, więc

$$A_p = \sum_{i=2}^n VaR_p(Z_i) = (n-1) \frac{(-\log(1-p))^2}{k^2}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} MME(p, n) &= (1-p)^{-\sqrt{n-1}} \frac{2}{k^2} e^{-k\sqrt{2A_p}} \left(k\sqrt{2A_p} + 1 \right) \\ &= (1-p)^{-\sqrt{n-1}} \frac{2}{k^2} (1-p)^{\sqrt{2(n-1)}} \left(1 - \log(1-p) \sqrt{2(n-1)} \right) \\ &= \frac{2}{k^2} \left(1 - \log(1-p) \sqrt{2(n-1)} \right) (1-p)^{(\sqrt{2}-1)\sqrt{n-1}}. \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 3.25. Niech (Z_1, \dots, Z_n) będzie wektorem losowym, którego łączny rozkład to wielowymiarowy rozkład Weibulla z parametrami $\alpha = \frac{1}{2}, \lambda_i = \frac{1}{k^2}, \gamma_i = \frac{1}{2}$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, natomiast rozkładem brzegowym Z_i jest rozkład Weibulla $Wei(k^{-2}, \frac{1}{2})$. Wtedy

$$MES(p, n) = \frac{2}{k^2} \left(1 - \log(1 - p)^{\sqrt{n-1}}\right).$$

Dowód. Wyliczanie MES będzie przebiegało analogicznie jak w przypadku MME. Mamy

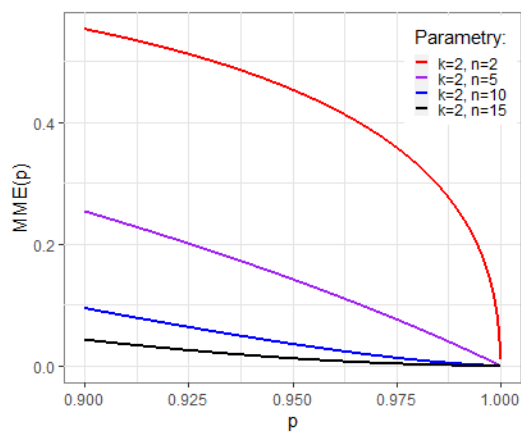
$$\begin{aligned} MES(p, n) &= \mathbb{E}[Z_1 | Z_2 > VaR_p(Z_2), \dots, Z_n > VaR_p(Z_n)] \\ &= \int_0^\infty \frac{\mathbb{P}[Z_1 > x, Z_2 > VaR_p(Z_2), \dots, Z_n > VaR_p(Z_n)]}{\mathbb{P}[Z_2 > VaR_p(Z_2), \dots, Z_n > VaR_p(Z_n)]} dx. \end{aligned}$$

Jest to ta sama całka co w poprzednim dowodzie, tylko z innym zakresem całkowania. Otrzymujemy zatem

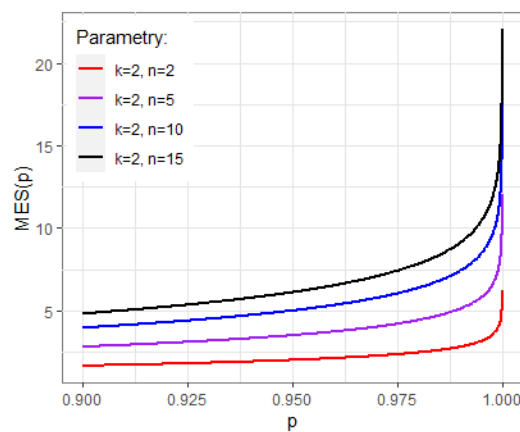
$$\begin{aligned} MES(p, n) &= (1 - p)^{-\sqrt{n-1}} \int_0^\infty e^{-k\sqrt{x+A_p}} dx \\ &= (1 - p)^{-\sqrt{n-1}} \left[\frac{-2}{k^2} e^{-k\sqrt{A_p+x}} (k\sqrt{A_p+x} + 1) \right]_0^\infty \\ &= (1 - p)^{-\sqrt{n-1}} \left[\frac{2}{k^2} e^{-k\sqrt{A_p}} (k\sqrt{A_p} + 1) \right] \\ &= (1 - p)^{-\sqrt{n-1}} \left[\frac{2}{k^2} (1 - p)^{\sqrt{n-1}} (1 - \log(1 - p)^{\sqrt{n-1}}) \right] \\ &= \frac{2}{k^2} (1 - \log(1 - p)^{\sqrt{n-1}}). \end{aligned}$$

□

Przeanalizujemy teraz wykresy MME i MES, wyznaczone dla wielowymiarowego rozkładu Weibulla, przy różnych wartościach n . Na wykresach 4a i 4b możemy zaobserwować jak zmieniają się wartości MME i MES dla coraz większych wartości n , czyli liczby linii biznesowych, wraz ze wzrastającym prawdopodobieństwem wypłacalności danej instytucji. MME pokazuje, że im więcej linii biznesowych posiada instytucja tym mniej strat może przynosić pojedyncza linia, gdy pozostałe są w niebezpieczeństwie. Natomiast MES wskazuje na to, że im więcej linii biznesowych tym większy kapitał do zabezpieczenia wypłacalności musi gromadzić pojedyncza linia, gdy pozostałe są w niebezpieczeństwie.



(a) MME



(b) MES

Rysunek 4. Wykresy MME i MES dla wielowymiarowego rozkładu Weibulla przy różnych wartościach n .

Literatura

- [1] Arendarczyk M., Kozubowski T.J., Panorska A.K. (2018), The joint distribution of the sum and maximum of dependent Pareto risks, *Journal of Multivariate Analysis*, 167, 136–156.
- [2] Arendarczyk M., Kozubowski T.J., Panorska A.K. (2018), The joint distribution of the sum and the maximum of heterogeneous exponential random variables, *Statistics and Probability Letters*, 139, 10-19.
- [3] Chiragiev A., Landsman Z. (2007), Multivariate Pareto portfolios: TCE-based capital allocation and divided differences, *Scandinavian Actuarial Journal*, 2007:4, 261-280.
- [4] Das B., Fasen V. (2018), Risk contagion under regular variation and asymptotic tail independence, *Journal of Multivariate Analysis*, 165, 194-215.
- [5] Denuit M., Dhaene J., Goovaerts M., Kaas R. (2005), *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*, John Wiley & Sons, Ltd.
- [6] Hashorva E. (2019), Approximation of some multivariate risk measures for Gaussian risks, *Journal of Multivariate Analysis*, 169, 330–340.
- [7] Klugman S.A., Panjer H.H., Willmot G.E. (2012), *Loss Models From Data to Decisions*, Wiley.
- [8] Lee C., Wen M.-J. (2010), A Multivariate Weibull Distribution, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 5(2), 55-66.
- [9] Lu J.C., Bhattacharyya G.K.(1990), Some new constructions of bivariate Weibull models, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 42, 543–559.
- [10] Ma D. (2017), *Mixing probability distributions*, Actuarial Modeling Topics, <https://actuarialmodelingtopics.wordpress.com/2017/08/18/mixing-probability-distributions/> .
- [11] Ma D. (2017), *Examples of mixtures*, Actuarial Modeling Topics, <https://actuarialmodelingtopics.wordpress.com/2017/10/02/examples-of-mixtures/> .
- [12] Rinne H. (2009), *The Weibull Distribution A Handbook*, Chapman and Hall/CRC.
- [13] Szekli R. (2012), *Matematyka ubezpieczeń majątkowych i osobowych*, Skrypt, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski.

- [14] Vernic R. (2011), Tail Conditional Expectation for the Multivariate Pareto Distribution of the Second Kind: Another Approach, *Methodology and Computing in Applied Probability*, 13, 121-137.