

Egzamin licencjacki/inżynierski

9 lutego 2024

Informacja dla zdających egzamin na kierunku informatyka

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Matematyka II, Metody programowania, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

Informacja dla zdających egzamin na kierunku ISIM

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Metody programowania, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne, Języki formalne i złożoność obliczeniowa) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

Informacja dla wszystkich zdających

Za brakujące (do trzech) zestawy zostanie wystawiona ocena niedostateczna z urzędu. Egzamin uważa się za zaliczony, jeśli student rozwiąże z oceną dostateczną co najmniej 2 zestawy. Wtedy ocena z egzaminu jest średnią arytmetyczną ocen z trzech wybranych zestawów. Na rozwiązanie przeznaczona jest czas $3 \times 40 + 30 = 150$ minut. Po wyjściu z sali egzaminacyjnej w czasie egzaminu nie ma możliwości powrotu do tej sali i kontynuowania pisania egzaminu.

Matematyka I — Logika dla informatyków

Kontekst zadania: W tym zadaniu chcemy pokazać, że transformacja CNF jest wykładnicza. Rozważmy dla $n \in \mathbb{N}$ zbiór zmiennych zdaniowych $V_n = \{p_0, \dots, p_n\}$ i formuły φ_n zdefiniowane indukcyjnie

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= p_0 \\ \varphi_{n+1} &= \neg(\varphi_n \leftrightarrow p_{n+1}).\end{aligned}$$

Łatwo zauważyć (i nie trzeba tego dowodzić), że formuła φ_n jest spełniona przez dokładnie połowę, czyli 2^n wartościowań zbioru V_n : dokładnie tych wartościowań, które spełniają nieparzystą liczbę zmiennych z tego zbioru.

Klauzulę nazwiemy *normalną* jeśli każda zmienna zdaniowa występuje w niej co najwyżej jeden raz.

Zadanie: Rozważmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ i niech ψ będzie dowolną formułą w koniunkcyjnej postaci normalnej (CNF), równoważną formule φ_n . Udowodnij, że

- (a) w każdej normalnej klauzuli formuły ψ występują wszystkie zmienne ze zbioru V_n , oraz
- (b) formuła ψ ma co najmniej 2^n klauzul.

Matematyka II — Algebra

Zadanie 1. (5 punktów)

Znaleźć wielomian (możliwie niskiego stopnia) który w punktach 1, 3, 4 przyjmuje wartości 1, 3, 2. UWAGA: chodzi o wielomian nad ciałem \mathbb{Z}_7 .

Zadanie 2. (4 punkty)

Niech $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Udowodnić, że $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Zadanie 3. (5 punktów)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć wartości własne tej macierzy.

Progi punktowe: 4, 6, 8, 10, 12 punktów.

Metody Programowania

Poniższe zadania należy rozwiązać używając języka Racket lub Plait.

Zadanie 1 Zaproponuj reprezentację wyrażeń arytmetycznych ze zmiennymi o następującej gramatyce:

$$e ::= n \mid x \mid e_1 + e_2 \mid e_1 - e_2 \mid e_1 \times e_2 \mid e_1 / e_2$$

gdzie n reprezentuje stałe liczbowe, natomiast x reprezentuje zmienne. Jeżeli Twoim meta-językiem jest Racket, to napisz predykat sprawdzający czy jego argument jest poprawnym wyrażeniem arytmetycznym.

Zadanie 2 Napisz procedurę `eval`, która dla danego wartościowania zmiennych (od Ciebie zależy reprezentacja wartościowania), zwraca wartość wyrażeń arytmetycznych z zadania 1.

Zadanie 3 Napisz procedurę `to-rpn`, która dla wyrażenia arytmetycznego z zadania 1 zwraca jego reprezentację w odwrotnej notacji polskiej. Wyrażenia ONP powinny być zwracane w formie listy – przykładowo, wyrażenie $3 \times x + 1$ zapisane w postaci ONP powinno mieć postać `{3 x * 1 +}`.

Matematyka dyskretna

Rozwiąż zależność rekurencyjną $a_n = 5a_{n-1}^2, a_1 = 1$.

Metody numeryczne

Za rozwiązanie zadań można otrzymać łącznie 12 punktów. Otrzymanie 4 pkt. gwarantuje ocenę dostateczną, próg dla `dst+` to 5.5 pkt., dla `db` – 7 pkt., dla `db+` 8.5 pkt., a dla `bdb` – 10 pkt.

1. **4 punkty** Podaj (w miarę) bezpieczny numerycznie algorytm obliczania zer równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Zastosowaną strategię **uzasadnij** odwołując się do **problemów** wynikających ze specyfiki arytmetyki zmiennopozycyjnej.
2. **4 punkty** Znajdź **postać Newtona** wielomianu interpolacyjnego dla następujących danych:

1	2	3	4	...	2023	2024
-8	-6	-4	-2	...	4036	0

Odpowiedź **uzasadnij**.

3. **4 punkty** Załóżmy, że znamy rozkład LU nieosobliwej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Jak wiedzę tę wykorzystać do **efektywnego** pod względem numerycznym wyznaczenia macierzy A^{-1} ? **Podaj i uzasadnij** odpowiedni algorytm. Jaka jest jego **złożoność** obliczeniowa i pamięciowa?

Algorytmy i struktury danych

Za rozwiązanie obydwu zadań z tej części można otrzymać w sumie do 9 punktów. Skala ocen: poniżej 3 punktów — ocena niedostateczna (egzamin niezdany), 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, 7 albo więcej punktów daje ocenę bardzo dobrą.

Zadanie 1: najdłuższy podciąg rosnący (4 punkty)

Dany jest n -elementowy ciąg liczb $S = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$. Należy wyznaczyć w tym ciągu najdłuższy podciąg rosnący.

Opracuj efektywny algorytm dynamiczny, który rozwiązuje to zadanie. Precyzyjnie opisz ideę rozwiązania a potem zapisz ją w pseudokodzie. Uzasadnij poprawność opisaney metody i oszacuj jej złożoność obliczeniową.

Zadanie 2: kolejka priorytetowa z operacją *median* (5 punktów)

Niech Q będzie kolejką priorytetową z następującymi operacjami:

1. $Q.insert(x)$: dodanie nowego elementu x do zbioru;
2. $Q.median(x)$: wyznaczenie środkowego co do wielkości elementu w zbiorze (mediany);
3. $Q.extract-median(x)$: usunięcie środkowego co do wielkości elementu w zbiorze (mediany).

Zaprojektuj i dokładnie opisz strukturę danych, która będzie efektywnie realizowała wymienione operacje na zbiorze dynamicznym. Każda z tych operacji powinna działać w czasie logarytmicznym $O(\log n)$, gdzie n jest liczbą elementów przechowywanych w zbiorze.

Jaką wartość będzie zwracać operacja *median* gdy n jest parzyste? Napisz procedury *insert* i *extract-median* w pseudokodzie i wyjaśnij jak one działają.

Możesz wykorzystać jakąś znaną strukturę danych, która efektywnie realizuje operacje kolejkowe i zaadaptować ją na potrzeby tego zadania.

Języki formalne i złożoność obliczeniowa

Częściowy Deterministyczny Automat Skończony (PDFA) jest zdefiniowany podobnie do DFA z jedną różnicą: funkcja przejścia może być częściowa, t.j., dla pewnych par stan, litera funkcja przejścia może być nieokreślona. Formalnie, PDFA \mathcal{A} nad Σ to krotka $\langle Q, q_0, \delta, F \rangle$ taka, że Q to skończony zbiór stanów, $q_0 \in Q$ to stan początkowy, $F \subseteq Q$ to zbiór stanów akceptujących a δ jest funkcją przejścia z pewnego podzbioru $Q \times \Sigma$ w Q (częściową funkcją przejścia). Podobnie jak dla DFA, rozszerzamy δ do $\hat{\delta}$ na słowa, gdzie $\hat{\delta}$ jest funkcją częściową zdefiniowaną jedynie jeśli wszystkie przejścia na w w \mathcal{A} są zdefiniowane.

Dla PDFA \mathcal{A} słowo w jest *ostrożnie synchronizujące* wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $q' \in Q$ taki, że dla każdego stanu $q \in Q$, (a) wartość funkcji $\hat{\delta}(q, w)$ jest określona oraz (b) $\hat{\delta}(q, w) = q'$.

Jaka jest złożoność problemu: dany PDFA \mathcal{A} , czy istnieje słowo ostrożnie synchronizujące \mathcal{A} ? Podaj klasę złożoności oraz uzasadnij odpowiednie inkluzje.