

# Egzamin licencjacki/inżynierski

20 lutego 2024

## **Informacja dla zdających egzamin na kierunku informatyka**

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Matematyka II, Metody programowania, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

## **Informacja dla zdających egzamin na kierunku ISIM**

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Metody programowania, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne, Języki formalne i złożoność obliczeniowa) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

## **Informacja dla wszystkich zdających**

Za brakujące (do trzech) zestawy zostanie wystawiona ocena niedostateczna z urzędu. Egzamin uważa się za zaliczony, jeśli student rozwiąże z oceną dostateczną co najmniej 2 zestawy. Wtedy ocena z egzaminu jest średnią arytmetyczną ocen z trzech wybranych zestawów. Na rozwiązanie przeznaczona jest czas  $3 \times 40 + 30 = 150$  minut. Po wyjściu z sali egzaminacyjnej w czasie egzaminu nie ma możliwości powrotu do tej sali i kontynuowania pisania egzaminu.



## Matematyka I — Logika dla informatyków

- (a) Jaka jest moc zbioru wszystkich podziałów zbioru  $\mathbb{N}$ ?
- (b) Jaka jest moc zbioru wszystkich skończonych podziałów zbioru  $\mathbb{N}$ ?

Obie odpowiedzi należy uzasadnić. Dla przypomnienia: podział to rodzina (czyli zbiór) zbiorów niepustych, parami rozłącznych i w sumie dających cały dzielony zbiór.

## Matematyka II — Algebra

Zadanie 1. (4 punkty)

Znaleźć wielomian (możliwie niskiego stopnia) który w punktach 1, 4, 6 przyjmuje wartości 1, 6, 5. UWAGA: chodzi o wielomian nad ciałem  $\mathbb{Z}_7$ .

Zadanie 2. (4 punkty)

Niech  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Udowodnić, że  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Zadanie 3. (6 punktów)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć wartości własne tej macierzy.

Progi punktowe: 4, 6, 8, 10, 12 punktów.

## Metody Programowania

Poniższe zadania należy rozwiązać używając języka Racket lub Plait.

**Zadanie 1** Zaimplementuj procedurę (`insert-sort xs`) sortującą listę wejściową przez wstawianie. Wykorzystaj napisaną przez siebie procedurę (`insert x xs`), która wstawia element  $x$  do posortowanej listy  $xs$  tak, aby wynikowa lista nadal była posortowana.

**Zadanie 2** Zaimplementuj procedurę (`merge-sort xs`) sortującą listę wejściową przez złączanie. W tym celu napisz następujące procedury:

- (`split xs`) – zwraca parę dwóch list różniących się długością o co najwyżej 1, których konkatenacja jest dowolną permutacją elementów  $xs$ .
- (`merge xs ys`) – dla dwóch posortowanych list  $xs$  i  $ys$  zwraca posortowaną listę wszystkich elementów  $xs$  oraz  $ys$ .

**Zadanie 3** Zaimplementuj predykat (`sorted? xs`) sprawdzający, czy lista  $xs$  jest posortowana. Następnie udowodnij, że:

- Dla dowolnej listy  $xs$  takiej, że  $(\text{sorted? } xs) \equiv \#t$ , oraz dla dowolnej liczby  $x$ , zachodzi  $(\text{sorted? } (\text{insert } x \ xs)) \equiv \#t$ .
- Dla dowolnej listy  $xs$  zachodzi  $(\text{sorted? } (\text{insert-sort } xs)) \equiv \#t$ .

## Matematyka dyskretna

Pokaż, że graf  $Q_4$  kostki czterowymiarowej nie jest planarny.

## Metody numeryczne

Za rozwiązanie zadań można otrzymać łącznie 12 punktów. Otrzymanie 4 pkt. gwarantuje ocenę dostateczną, próg dla `dst+` to 5.5 pkt., dla `db` – 7 pkt., dla `db+` 8.5 pkt., a dla `bdb` – 10 pkt.

1. **4 punkty** Co oznacza pojęcie *utraty cyfr znaczących* i jakie ma ono znaczenie z punktu widzenia analizy numerycznej? Dla jakich wartości  $x$  obliczanie wartości wyrażenia

$$(x^3 + \sqrt{x^6 + 2024^2})^{-1}$$

może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposób obliczenia wyniku dokładniejszego.

2. **4 punkty** Opisz **szczegółowo** zadanie interpolacji i zaproponuj **efektywną** pod względem numerycznym i złożoności obliczeniowej metodę jego rozwiązywania.
3. **4 punkty** Czym są i jakie zastosowania w analizie numerycznej mają ciągi wielomianów ortogonalnych?

## Algorytmy i struktury danych

Za rozwiązanie obydwu zadań z tej części można otrzymać w sumie do 9 punktów. Skala ocen: poniżej 3 punktów — ocena niedostateczna (egzamin niezdany), 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, 7 albo więcej punktów daje ocenę bardzo dobrą.

### Zadanie 1: triangulacja wielokąta wypukłego (4 punkty)

Triangulacją wielokąta wypukłego o  $n \geq 3$  wierzchołkach nazywamy zbiór  $n - 3$  przekątnych takich, że żadne dwie się nie przecinają (pomijając wspólne końce). Zauważmy, że triangulacja definiuje podział wnętrza wielokąta na  $n - 2$  rozłączne trójkąty. Koszt triangulacji wielokąta zdefiniujemy jako sumę długości przekątnych wyznaczających podział na trójkąty. Zadanie polega na wykonaniu triangulacji o minimalnym koszcie.

Opracuj efektywny algorytm dynamiczny, który wyznacza minimalny koszt triangulacji dla zadanego wielokąta wypukłego. Precyzyjnie opisz ideę rozwiązania a potem zapisz ją w pseudokodzie. Uzasadnij poprawność opisanej metody i oszacuj jej złożoność obliczeniową.

### Zadanie 2: operacje *union* przed operacjami *find* na zbiorach rozłącznych (5 punktów)

Niech dany będzie ciąg  $m$  operacji *union* i *find* na zbiorach rozłącznych, w którym wszystkie operacje *union* występują przed operacjami *find*. Udowodnij, że koszt czasowy wykonania tych operacji na drzewiastych strukturach reprezentujących zbiory rozłączne ze zbalansowanym łączeniem i kompresją ścieżek wynosi  $\Theta(m)$ .

Opisz budowę drzewiastej struktury danych dla zbiorów rozłącznych. Napisz jakie zadania realizują operacje *union* i *find* w tej strukturze? Na czym polega łączenie według rozmiaru/rangi oraz na czym polega kompresja ścieżki podczas wyszukiwania? Zapisz w pseudokodzie operację *union* z łączeniem według rozmiaru/rangi oraz operację *find* z kompresją ścieżki.

Jaka jest pesymistyczna złożoność czasowa każdej z wymienionych operacji? Jaka jest złożoność czasowa wykonania ciągu  $m$  operacji *union* i *find* na zbiorach rozłącznych we wspomnianej postaci drzewiastej zbiorów? Precyzyjnie uzasadnij, że złożoność czasowa wykonania takiego szczególnego przypadku ciągu operacji na zbiorach rozłącznych, w którym wszystkie łączenia zbiorów następują przed szukaniem reprezentantów jest liniowa  $O(m)$ .



## Języki formalne i złożoność obliczeniowa

Niech  $N > 1$  będzie stałą. Pokaż, jaka jest złożoność następującego problemu: Dany wielomian wielu zmiennych  $p(\vec{x})$  o współczynnikach całkowitych, czy istnieje ciąg liczb wymiernych  $\vec{v}$  taki, że (a)  $\vec{v}$  jest rozwiązaniem równania  $p(\vec{x}) = 0$ , oraz (b) każda z liczb w ciągu  $\vec{v}$  ma mianownik ograniczony przez  $N$ .