

Egzamin licencjacki/inżynierski

10 lutego 2025

Informacja dla zdających egzamin na kierunku informatyka

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Matematyka II, Metody programowania, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

Informacja dla zdających egzamin na kierunku ISIM

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Metody programowania, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne, Języki formalne i złożoność obliczeniowa) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

Informacja dla wszystkich zdających

Za brakujące (do trzech) zestawy zostanie wystawiona ocena niedostateczna z urzędu. Egzamin uważa się za zaliczony, jeśli student rozwiąże z oceną dostateczną co najmniej 2 zestawy. Wtedy ocena z egzaminu jest średnią arytmetyczną ocen z trzech wybranych zestawów. Na rozwiązanie przeznaczona jest czas $3 \times 40 + 30 = 150$ minut. Po wyjściu z sali egzaminacyjnej w czasie egzaminu nie ma możliwości powrotu do tej sali i kontynuowania pisania egzaminu.

Matematyka I — Logika dla informatyków

Niech R będzie dowolną relacją na zbiorze A . Czy poniższe stwierdzenia są prawdziwe? W każdym podpunkcie podaj dowód lub zbuduj odpowiedni kontrprzykład.

1. Relacja $R^{-1}; (R \cup R^{-1})^+; R$ jest symetryczna.
2. Relacja $R^{-1}; (R \cup R^{-1})^+; R$ jest przechodnia.

Przypominamy, że dla dowolnej relacji S , relacja S^+ to przechodnie domknięcie S . Można skorzystać z faktu, że $S^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$.

Matematyka II — Algebra

Zadanie 1. (4 punkty)

W przestrzeni Π_2 wielomianów stopnia ≤ 2 definiujemy iloczyn skalarny

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$$

Proszę wykonać ortogonalizację bazy potęgowej tej przestrzeni.

Zadanie 2. (5 punktów)

Macierz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nazywamy macierzą ortogonalną *iff* $A^T A = I$. Niech A, B będą macierzami ortogonalnymi. Udowodnić, że

1. A^T, A^{-1} są macierzami ortogonalnymi.
2. $\det(A) = \pm 1$.

Zadanie 3. (6 punktów)

Rozważamy układ $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Podać warunki dla $\text{rank}(A)$, $\text{rank}([A \mid b])$, które skutkują tym, że układ

1. nie ma rozwiązań,
2. ma jedno rozwiązanie,
3. ma więcej niż jedno rozwiązanie.

Progi punktowe: 5, 7, 9, 11, 13 punktów.

Matematyka dyskretna

Pewien człowiek ma siedmiu przyjaciół. Na ile sposobów może on zapraszać na kolację po trzech z nich przez siedem kolejnych dni tak by każdy z nich był zaproszony przynajmniej raz?

Metody Programowania

Poniższe zadania należy rozwiązać używając języka **Plait** lub **OCaml**.

W poniższych zadaniach rozważamy funkcyjny język programowania **egz**, którego składnia abstrakcyjna zawiera:

- stałe liczbowe,
- zmienne,
- funkcje jednoargumentowe,
- aplikacje funkcji,
- let-wyrażenia.

Semantyka jest typowa, tzn. analogiczna do semantyki języków **Plait** i **OCaml**.

Zadanie 1 Zdefiniuj typ danych reprezentujący składnię abstrakcyjną języka **egz**. Zmienne reprezentuj przy użyciu symboli (dla języka **Plait**) lub ciągów znaków (dla języka **OCaml**).

Zadanie 2 Zdefiniuj alternatywny typ danych reprezentujący składnię abstrakcyjną języka **egz**, ale wykorzystujący dla reprezentacji zmiennych indeksy de Bruijna. To znaczy, że w wyrażeniach wiążących (funkcjach i let-wyrażeniach) nie występują nazwy zmiennych. natomiast same zmienne reprezentowane są pojedynczą liczbą naturalną. Liczba ta mówi, ile wyrażen wiążących (licząc od wystąpienia zmiennej) należy pominąć, aby znaleźć wyrażenie wiążące daną zmienną. W szczególności, liczba 0 oznacza, że zmienna jest wiązana przez leksykalnie najbliższe wyrażenie wiążące.

Zadanie 3 Zaimplementuj funkcję przekształcającą zamknięte wyrażenia w składni abstrakcyjnej z zadania 1 do równoważnych wyrażen w składni abstrakcyjnej z zadania 2. Możesz założyć istnienie funkcji implementujących środowiska – nie musisz ich definiować.

Zadanie 4 Zdefiniuj typ danych reprezentujący wartości w języku **egz**. Następnie zaimplementuj ewaluator dla składni abstrakcyjnej z zadania 2. Środowiska reprezentuj przy użyciu list.

Metody numeryczne

Za rozwiązanie zadań można otrzymać łącznie 12 punktów. Otrzymanie 4 pkt. gwarantuje ocenę dostateczną, próg dla dst+ to 5.5 pkt., dla db – 7 pkt., dla db+ 8.5 pkt., a dla bdb – 10 pkt.

1. **4 punkty** Zadanie z cyklu *Z życia wzięte...*

- Miejsce i czas: Budynek Instytutu Informatyki UWr. Dzień przed egzaminem z AN.
- Osoby: Balbinka i Ptyś.
- Opis wydarzenia:
 - Cześć Ptysiu! Jak tam wczorajsza impreza?
 - Chyba dzisiejsza. Było czadowo! Do 3 w nocy robiliśmy zadania z numerków.
 - Nigdy Was nie zrozumieć. Wszystko odkładacie na ostatnią chwilę. Ja jestem przygotowana do egzaminu już od tygodnia.
 - Tak? No to sprawdźmy! Weźmy 4 liczby maszynowe u_1, u_2, u_3, u_4 , których suma jest różna od zera. Obliczmy tę sumę przy pomocy takiego oto algorytmu:

```
S:=u[4];
```

```
for i from 3 to 1 by -1
do
  S:=S+u[i]
od;
```

```
Return(S)
```

- No i co dalej – zaśmiała się Balbinka – czegoś trudniejszego nie mogłeś wymyślić?
- Poczekaj! **Pytanie brzmi:** czy ten algorytm zrealizowany w arytmetyce fl zawsze oblicza wynik, który jest bliski rzeczywistej sumie tych liczb? Przy czym zakładamy, że nie występuje nadmiar.
- Ależ to banalne... **Już odpowiadam:** oczywiście, że tak! Wynika to z tego, że algorytm ten jest numerycznie poprawny – prawie krzyczy Balbinka.
- No tak – zasepił się Ptyś – a myślałem, że Cię zaskoczę. Ty jednak zawsze jesteś świetnie przygotowana. A my wpadliśmy na to dopiero przed 3 nadranem...

Czy Balbinka miała rację? Czy była dobrze przygotowana do egzaminu? Odpowiedź **dokładnie uzasadnij**.

2. **4 punkty** **Wyprowadź** złożony wzór Trapezów. Niech dana będzie funkcja **parzysta** $f \in C(\mathbb{R})$ oraz liczba naturalna N . **Zaproponuj** sposób **efektywnego** wyznaczania wszystkich wartości $T_{2^n}(f)$ dla $n = 0, 1, \dots, N$, gdzie $T_m(f)$ ($m \in \mathbb{N}$) oznacza złożony wzór trapezów odpowiadający całce $\int_{-a}^a f(x)dx$ ($a > 0$).

3. **4 punkty** Opisz metodę faktoryzacji rozwiązywania układów równań liniowych. Następnie **znajdź** rozkład LU macierzy

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -5 & 3 & -4 \\ 4 & 12 & -10 & 10 \\ -2 & -6 & 8 & -6 \end{bmatrix},$$

i wykorzystaj go do **rozwiązania metodą faktoryzacji** (inne metody nie wchodzą w grę!) układu równań $Ax = b$, gdzie $b := [10, -18, 38, -18]^T$.

Algorytmy i struktury danych

Za rozwiązanie obydwu zadań z tej części można otrzymać w sumie do 9 punktów. Skala ocen: poniżej 3 punktów — ocena niedostateczna (egzamin niezdany), 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, 7 albo więcej punktów daje ocenę bardzo dobrą.

Zadanie 1: najtańsze zakupy wszystkich rodzajów ciastek (4 punkty)

W pewnej cukierni dostępnych jest $N > 1$ różnych rodzajów ciastek. Znale są też ceny wszystkich ciastek c_1, c_2, \dots, c_N . Cukiernia ta ma również atrakcyjną promocję: kupując jedno ciastko, można sobie wybrać za darmo maksymalnie $1 \leq K < N$ innych ciastek różnych rodzajów. Znajdź minimalną kwotę pieniędzy, którą musimy wydać, aby kupić N różnych ciastek.

Opracuj efektywny algorytm rozwiązujący to zadanie. Precyzyjnie opisz ideę rozwiązania a potem zapisz ją w pseudokodzie. Uzasadnij poprawność opisanej metody i oszacuj jej złożoność obliczeniową.

Zadanie 2: kopiec dwumianowy z operacją podziału (5 punktów)

Precyzyjnie opisz strukturę danych, którą jest *kopiec dwumianowy*.

- Jak jest zbudowany kopiec dwumianowy (w tym także drzewa dwumianowe)?
- Jakie operacje są efektywnie zaimplementowane w tej strukturze danych i jaka jest ich złożoność czasowa w zależności od liczby n przechowywanych w kopcu elementów?
- Opisz dokładnie operację łączenia dwóch kopców dwumianowych.
- Narysuj kopiec dwumianowy zawierający 21 różnych liczb naturalnych.

Następnie zaprojektuj i dokładnie opisz efektywną procedurę podziału kopca dwumianowego na dwa równoliczne (z dokładnością do jednego elementu) kopce. Przeanalizuj i oszacuj złożoność czasową tej procedury.

Języki formalne i złożoność obliczeniowa

Zapisz sformułowanie lematu o pompowaniu dla języków regularnych oraz dla języków bezkontekstowych. Następnie, zauważ (oraz krótko uzasadnij), że jeśli L jest rozpoznawany przez DFA o n stanach, to stała z lematu o pompowaniu wynosi co najwyżej n . Ostatecznie, jaka jest maksymalna możliwa wartość stałej z lematu o pompowaniu dla języka rozpoznawanego przez deterministyczny automat ze stosiem o co najwyżej n stanach? Odpowiedź uzasadnij.