

# Egzamin licencjacki/inżynierski

10 lutego 2026

## **Informacja dla zdających egzamin na kierunku informatyka**

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Matematyka II, Metody programowania, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

## **Informacja dla zdających egzamin na kierunku ISIM**

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Metody programowania, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne, Języki formalne i złożoność obliczeniowa) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

## **Informacja dla wszystkich zdających**

Za brakujące (do trzech) zestawy zostanie wystawiona ocena niedostateczna z urzędu. Egzamin uważa się za zaliczony, jeśli student rozwiąże z oceną dostateczną co najmniej 2 zestawy. Wtedy ocena z egzaminu jest średnią arytmetyczną ocen z trzech wybranych zestawów. Na rozwiązanie przeznaczona jest czas  $3 \times 40 + 30 = 150$  minut. Po wyjściu z sali egzaminacyjnej w czasie egzaminu nie ma możliwości powrotu do tej sali i kontynuowania pisania egzaminu.



## Matematyka I — Logika dla informatyków

Jaka jest moc zbioru funkcji  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  spełniających dla wszystkich  $i, j \in \mathbb{N}$  warunek  $f(i + j) = f(i) + f(j) - 1$ ? Uzasadnij odpowiedź.

## Matematyka II — Algebra

Zadanie 1. (6 punktów)

Użyć chińskiego twierdzenia o resztach w celu wyznaczenia całkowitego  $x$  takiego, że  $x \equiv_5 3$ ,  $x \equiv_7 6$ ,  $x \equiv_{13} 4$ .

Zadanie 2. (5 punktów)

W przestrzeni  $\Pi_2$  wielomianów stopnia  $\leq 2$  definiujemy iloczyn skalarny

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$$

Proszę wykonać ortogonalizację bazy potęgowej tej przestrzeni.

Zadanie 3. (4 punkty)

$\lambda$  jest wartością własną macierzy  $A$ . Wskazać jedną z wartości własnych macierzy  $A^2$ . Jakie są wartości własne macierzy  $M = a_0 I + a_1 A + \dots + a_n A^n$ ?

Progi punktowe: 5, 7, 9, 11, 13 punktów.

## Matematyka dyskretna

Pokaż nie odwołując się do twierdzenia Brooksa, że dowolny spójny graf  $G$  zawierający wierzchołek rozcinający można pokolorować  $\deg(G)$  kolorami.

Wsk.: Najpierw pokaż, że graf spójny zawierający wierzchołek stopnia mniejszego niż  $\deg(G)$  można pokolorować  $\deg(G)$  kolorami

## Metody Programowania

Poniższe zadania należy rozwiązać używając języka Racket, Plait lub OCaml.

Rozważmy język wyrażeń arytmetycznych zawierający stałe liczbowe, zmienne, operację dodawania i mnożenia.

**Zadanie 1** Napisz predykat (dla języka Racket) lub typ (dla języków Plait oraz OCaml) definiujący składnię abstrakcyjną tego języka.

Następnie zaimplementuj ewaluator wyrażeń arytmetycznych w tak zdefiniowanej składni abstrakcyjnej. Wartości zmiennych powinny być nadawane przez środowisko.

**Zadanie 2** Napisz predykat (dla języka Racket) lub typ (dla języków Plait oraz OCaml) definiujący składnię abstrakcyjną wyrażeń arytmetycznych w odwrotnej notacji polskiej. Wyrażenia takie powinny być reprezentowane jako listy stałych liczbowych, zmiennych lub operatorów binarnych (dodawania i mnożenia).

Następnie zaimplementuj ewaluator tak zdefiniowanych wyrażeń arytmetycznych w odwrotnej notacji polskiej. Podobnie jak w poprzednim zadaniu, wartości zmiennych powinny być nadawane przez środowisko.

**Zadanie 3** Zaimplementuj funkcję tłumaczącą wyrażenia w składni abstrakcyjnej z zadania 1 do odwrotnej notacji polskiej zdefiniowanej jak w zadaniu 2. Zadbaj o to, aby funkcja tłumacząca działała w czasie proporcjonalnym liniowo do liczby węzłów wejściowego drzewa składni abstrakcyjnej.

## Algorytmy i struktury danych

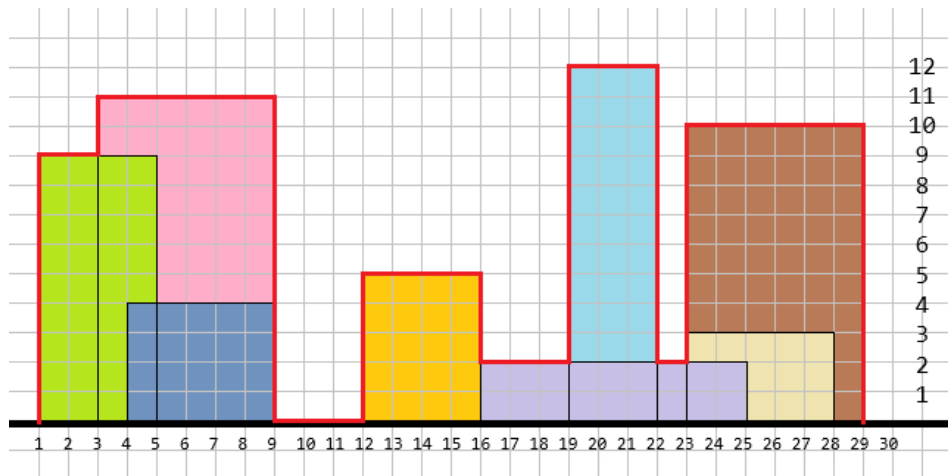
Za rozwiązanie obydwu zadań z tej części można otrzymać w sumie do 9 punktów. Skala ocen: poniżej 3 punktów — ocena niedostateczna (egzamin niezdany), 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, 7 albo więcej punktów daje ocenę bardzo dobrą.

### Zadanie 1: linia horyzontu (5 punktów)

Linia horyzontu miasta to zewnętrzny kontur sylwetki wszystkich budynków w tym mieście, który można zaobserwować z daleka. Znajac lokalizację i kształty wszystkich budynków, należy obliczyć długość konturu wyznaczonego przez te budynki. Zadanie to jest nazywane w algorytmice problemem linii horyzontu (ang. the skyline problem).

W naszym zadaniu budynki mają prostokątne kształty i są umieszczone na płaskiej powierzchni o wysokości 0. Każdy budynek jest opisany trzema parametrami  $(l, h, r)$ , gdzie  $l < r$  to współrzędne  $x$  lewej i prawej krawędzi budynku a  $h > 0$  to współrzędna  $y$  czyli wysokość budynku.

Na przykład rozważmy zbiór budynków przedstawiony na poniższym rysunku:  $(3, 11, 9)$ ,  $(1, 9, 5)$ ,  $(12, 5, 16)$ ,  $(19, 12, 22)$ ,  $(23, 10, 29)$ ,  $(4, 4, 9)$ ,  $(23, 3, 28)$ ,  $(16, 2, 25)$ . Ośiem budynków jest osadzonych na płaskim gruncie oznaczonym grubą czarną linią. Rozwiązaniem dla tego przykładu jest wartość 96, czyli długość konturu oznaczonego czerwoną linią średniej grubości.



Twoim zadaniem jest skonstruowanie efektywnego algorytmu rozwiązującego to zadanie:

- przedstaw ideę rozwiązania;
- zapisz algorytm w pseudokodzie (wraz z niezbędnymi komentarzami);
- napisz jakich struktur danych używasz w swoim rozwiązaniu;
- uzasadnij poprawność zaprezentowanego algorytmu;
- oszacuj jego złożoność obliczeniową (czasową i pamięciową).

Wskazówka: rozważ kolejne ściany budynków zgodnie z rosnącymi współrzędnymi.

### Zadanie 2: sortowanie przez zliczanie (4 punkty)

W  $n$ -elementowej tablicy zapisane są różne liczby całkowite z zakresu od 0 do  $k^2 - 1$ , przy czym  $1 < k < n$ . Zaprojektuj algorytm bazujący na *sortowaniu przez zliczanie*, który posortuje te liczby w liniowym czasie  $O(n)$ .

W swoim rozwiązaniu opisz:

- algorytm sortowania przez zliczanie — na jakich danych pracuje ten algorytm, jaka jest główna idea działania tego algorytmu, jaka jest jego złożoność obliczeniowa (czasowa i pamięciowa), czy jest stabilny (odpowiedź uzasadnij), czy działa w miejscu (odpowiedź uzasadnij)?
- adaptację algorytmu sortowania przez zliczanie do rozwiązania zadanego problemu — opisz na czym polega modyfikacja (idea rozwiązania), zapisz algorytm w pseudokodzie, oszacuj jego złożoność obliczeniową, czy jest stabilny i czy działa w miejscu.

## Metody numeryczne

Za rozwiązanie zadań można otrzymać łącznie 12 punktów. Otrzymanie 4 pkt. gwarantuje ocenę dostateczną, próg dla dst+ to 5.5 pkt., dla db – 7 pkt., dla db+ 8.5 pkt., a dla bdb – 10 pkt.

1. **4 punkty** Niech dana będzie funkcja  $f(x) := \frac{1013}{4} \cdot \frac{1 - \cos(5x)}{x^2}$ . W trybie pojedynczej lub podwójnej precyzji otrzymujemy  $\text{fl}(f(10^{-i})) = 0.0$ , gdzie  $i = 11, 12, \dots, 20$ . **Uzasadnij**, że wyniki te nie odpowiadają rzeczywistym wartościom  $f(10^{-i})$  ( $11 \leq i \leq 20$ ). **Wytłumacz** dlaczego tak się dzieje i **zaproponuj** sposób obliczenia wyników dokładniejszych.
2. **4 punkty** **Szczegółowo opisz** metodę Romberga całkowania numerycznego.
3. **4 punkty** Niech dana będzie **nieosobliwa macierz trójkątniowa**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . **Zaproponuj i uzasadnij efektywny** pod względem numerycznym i złożoności obliczeniowej algorytm wyznaczania  $A^{-1}$ . Podaj jego **złożoność obliczeniową i pamięciową**.

## Języki formalne i złożoność obliczeniowa

Rozważmy zbiorów par liczb naturalnych  $Y = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \forall k > y. \varphi_x(k) \neq \perp\}$ , czyli zbiór par program  $x$  oraz wartość  $y$  takich, że program o numerze  $x$  zatrzymuje się na każdym wejściu większym od  $y$ . Czy zbiór  $Y$  jest r.e.? Czy  $Y$  jest co-r.e.?