

Egzamin licencjacki/inżynierski

20 lutego 2026

Informacja dla zdających egzamin na kierunku informatyka

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Matematyka II, Metody programowania, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

Informacja dla zdających egzamin na kierunku ISIM

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Metody programowania, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne, Języki formalne i złożoność obliczeniowa) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

Informacja dla wszystkich zdających

Za brakujące (do trzech) zestawy zostanie wystawiona ocena niedostateczna z urzędu. Egzamin uważa się za zaliczony, jeśli student rozwiąże z oceną dostateczną co najmniej 2 zestawy. Wtedy ocena z egzaminu jest średnią arytmetyczną ocen z trzech wybranych zestawów. Na rozwiązanie przeznaczona jest czas $3 \times 40 + 30 = 150$ minut. Po wyjściu z sali egzaminacyjnej w czasie egzaminu nie ma możliwości powrotu do tej sali i kontynuowania pisania egzaminu.

Matematyka I — Logika dla informatyków

Czy istnieją takie relacje równoważności R i S , że $R \cup S$ jest a $R;S$ nie jest relacją równoważności? Uzasadnij odpowiedź.

Matematyka II — Algebra

Zadanie 1. (5 punktów)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & & & & \\ b_2 & a_2 & b_3 & & & \\ & b_3 & a_3 & b_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n-1} & a_{n-1} & b_n \\ & & & & b_n & a_n \end{vmatrix}.$$

Udowodnić, że $D_k = a_k D_{k-1} - b_k^2 D_{k-2}$ ($k = 3, 4, \dots$).

Zadanie 2. (3 punkty)

Znaleźć całkowite liczby a, b takie że $13a + 8b = 1$. (Odgadnięcie to 1p.)

Zadanie 3. (6 punktów)

Rozważamy przestrzeń Π_4 wielomianów stopnia ≤ 4 .

a) (2p.) Wykazać, że wielomiany $p_i(x) = \prod_{j=1}^{i-1} (x - j)$, ($i = 0, \dots, 4$) tworzą bazę tej przestrzeni.

b) (4p.) Znaleźć współczynniki rozwinięcia wielomianu $w(x) = x^4 - 7x^3 + 16x^2 - 12x + 3$ względem tej bazy. (Rozwiązanie korzystające z postaci potęgowej to 2 pkt.)

Progi punktowe: 5, 7, 9, 11, 13 punktów.

Matematyka dyskretna

Dla dowolnych $m \geq k$ pokaż wzór zwarty na sumę

$$\sum_{r=1}^k (-1)^r \binom{m}{r}$$

Wsk.: Przedstaw tę sumę jako sumę teleskopową.

Metody Programowania

Poniższe zadania należy rozwiązać używając języka Racket, Plait lub OCaml.

Rozważmy język zawierający:

- stałe liczbowe zmiennopozycyjne,
- stałe macierzowe 2×2 ,
- zmienne,
- let-wyrażenia,
- operację dodawania zdefiniowaną dla par liczb oraz par macierzy,
- operację mnożenia zdefiniowaną dla par liczb, par macierzy oraz liczby i macierzy,
- operację transpozycji macierzy.

Zadanie 1 Napisz predykat (dla języka Racket) lub typ (dla języków Plait oraz OCaml) definiujący składnię abstrakcyjną tego języka. W ten sam sposób zdefiniuj predykat lub typ wartości obliczanych w tym języku.

Zadanie 2 Zaimplementuj środowiskowy interpreter wyrażeń w tym języku. Operacje dodawania i mnożenia powinny być zdefiniowane w sposób zgodny z ich typowym rozumieniem w algebrze liniowej, w szczególności:

- Wynikiem dodania dwóch macierzy 2×2 jest macierz 2×2 , której elementami są sumy elementów na tej samej pozycji w macierzach wejściowych.
- Wynikiem mnożenia liczby i macierzy 2×2 jest macierz 2×2 , której każdy element jest iloczynem liczby wejściowej oraz elementu na tej samej pozycji w macierzy wejściowej.

Wykonanie operacji na wartościach, dla których operacja nie jest zdefiniowana (np. transpozycja wartości liczbowej) powinno prowadzić do błędu wykonania.

Zadanie 3 Napisz predykat (dla języka Racket) lub typ (dla języków Plait oraz OCaml) definiujący typy wartości w tym języku (typ liczbowy i typ macierzowy). Następnie zaimplementuj funkcję sprawdzającą poprawność typów w tym języku.

Algorytmy i struktury danych

Za rozwiązanie obydwu zadań z tej części można otrzymać w sumie do 9 punktów. Skala ocen: poniżej 3 punktów — ocena niedostateczna (egzamin niezdany), 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, 7 albo więcej punktów daje ocenę bardzo dobrą.

Zadanie 1: odległość edycyjna (4 punkty)

Mając dane dwa łańcuchy znakowe s i t oraz trzy operacje edycyjne (wstawianie, usuwanie i zamiana), które można wykonać na ciągu s , należy znaleźć minimalny koszt edycyjny przekształcenia ciągu s w ciąg t .

Oto trzy dozwolone operacje edycyjne:

1. $insert(s, i, c)$: wstawienie znaku c do łańcucha s na pozycję i ;
2. $remove(s, i)$: usunięcie znaku z łańcucha s na pozycji i ;
3. $replace(s, i, c)$: zamiana znaku w łańcuchu s na pozycji i na znak c .

Koszt każdej z tych operacji to: dla wstawiania wynosi j , dla usuwania wynosi r i dla zamiany wynosi x , przy czym $0 < r \leq j \leq x$ oraz $r + j > x$.

Twoim zadaniem jest skonstruowanie efektywnego algorytmu dynamicznego rozwiązującego to zadanie:

- przedstaw ideę rozwiązania;
- zapisz algorytm w pseudokodzie (wraz z niezbędnymi komentarzami);
- uzasadnij poprawność zaprezentowanego algorytmu;
- oszacuj jego złożoność obliczeniową (czasową i pamięciową).

Zadanie 2: poprzednik elementu w B–drzewie (5 punktów)

Opisz szczegółowo strukturę B–drzewa (z uwzględnieniem parametru t , czyli minimalnego stopnia węzła wewnętrznego).

Następnie opracuj efektywny algorytm wyznaczający następnika zadanego klucza przechowywanego w B–drzewie. Przedstaw ideę tego algorytmu a potem zapisz go w pseudokodzie (wraz z niezbędnymi komentarzami). Uzasadnij, że opisany algorytm działa poprawnie i przeanalizuj jego złożoność obliczeniową.

Metody numeryczne

Za rozwiązanie zadań można otrzymać łącznie 12 punktów. Otrzymanie 4 pkt. gwarantuje ocenę dostateczną, próg dla dst+ to 5.5 pkt., dla db – 7 pkt., dla db+ 8.5 pkt., a dla bdb – 10 pkt.

1. **4 punkty** Zadanie z cyklu *Z życia wzięte...*

- Miejsce i czas: Parter Instytutu Informatyki UW.
- Osoby: Balbinka i Pysiu.
- Opis wydarzenia:
 - Pysiu, Pysiu, poczekaj!
 - O rany, Balbinko, o co chodzi? Spiesz się.
 - Spieszysz się. A ja pomagałam Ci przygotować się do ćwiczeń z numerków.
 - Noooo, pamiętam. Tylko co z tego wyszło? Oboje oblaliśmy!
 - No wiem przecież. Tym razem na pewno nam się uda.
 - Mam nadzieję. To moje drugie podejście...
 - Nie marudź, numerki są super! Ja próbuję już trzeci raz i się nie skarżę. Ale do rzeczy. Podobno napisałeś kiedyś świetne implementacje arcusa tangensa i logarytmu naturalnego w PWO++. Mogę z nich skorzystać?
 - Też o tym słyszałaś? Moje implementacje są *the best*. Krążą o nich legendy...
 - No wiem właśnie i stąd prośba. Mam tylko jedno pytanie: skąd masz pewność, że wyniki są zawsze bliskie tym rzeczywistym? Przecież arytmetyka fl rządzi się swoimi prawami. Są błędy zaokrągleń. No i w ogóle...
 - Oj Balbinko, Balbinko. Chodzi o to, że ja udowodniłem, że oba moje algorytmy są numerycznie poprawne! Z implementacją logarytmu byłem na konsultacjach u RNo, a z implementacją arcusa tangensa u FCh. Potwierdzili, że się nie mylę i że moje algorytmy są numerycznie poprawne. Rozumiesz teraz?
 - Numerycznie poprawne, mówisz? No jasne! PWO opowiadał o numerycznej poprawności na wykładach, a WKa na repetach. Pysiu, ale Ty jesteś mądry. To podeślesz te kody?
 - Oczywiście. Możesz ich śmiało używać i nie martwić się o wyniki. Tylko nie zapomnij zaznaczyć w swoim programie, że to ja jestem autorem tych funkcji!
 - Pysiu, no wiadomo. Przecież wszyscy przestrzegamy KODEKSU SAMODZIELNEGO STUDIOWANIA¹

Czy Balbinka może rzeczywiście spokojnie używać przygotowanych przez Pysia implementacji? Odpowiedź **dokładnie uzasadnij**.

2. **4 punkty** Czym jest wykładnik zbieżności metody iteracyjnej znajdującej przybliżone miejsce zerowe α równania nieliniowego $f(x) = 0$? **Jakie ma on znaczenie**

¹Dostępny na stronie <https://ii.uni.wroc.pl/dla-studenta/dla-nowych-studentow>.

w praktyce obliczeniowej? Niech α będzie podwójnym zerem funkcji f , tzn. $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0 \neq f''(\alpha)$. **Wykaż**, że metoda Newtona jest wówczas **zbieżna liniowo**.

3. 4 punkty Niech dana będzie **nieosobliwa macierz trójkątniowa** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. **Zaproponuj i uzasadnij efektywny** pod względem numerycznym i złożoności obliczeniowej **algorytm** rozwiązywania układu równań liniowych $Ax = b$, gdzie $b \in \mathbb{R}^n$ jest danym wektorem. Podaj jego **złożoność obliczeniową i pamięciową**.