

Egzamin licencjacki/inżynierski

8 września 2025

Informacja dla zdających egzamin na kierunku informatyka

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Matematyka II, Metody programowania, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

Informacja dla zdających egzamin na kierunku ISIM

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Metody programowania, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne, Języki formalne i złożoność obliczeniowa) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

Informacja dla wszystkich zdających

Za brakujące (do trzech) zestawy zostanie wystawiona ocena niedostateczna z urzędu. Egzamin uważa się za zaliczony, jeśli student rozwiąże z oceną dostateczną co najmniej 2 zestawy. Wtedy ocena z egzaminu jest średnią arytmetyczną ocen z trzech wybranych zestawów. Na rozwiązanie przeznaczona jest czas $3 \times 40 + 30 = 150$ minut. Po wyjściu z sali egzaminacyjnej w czasie egzaminu nie ma możliwości powrotu do tej sali i kontynuowania pisania egzaminu.

Matematyka I — Logika dla informatyków

Rozważmy dla $n \in \mathbb{N}$ zbiór zmiennych zdaniowych $V_n = \{p_0, \dots, p_n\}$ i formułę φ_n zdefiniowaną indukcyjnie

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= p_0 \\ \varphi_{n+1} &= \neg(\varphi_n \leftrightarrow p_{n+1}).\end{aligned}$$

- (a) Sformułuj zasadę indukcji, z której skorzystasz w dalszej części zadania.
- (b) Udowodnij indukcyjnie, że formuła φ_n jest spełniona przez dokładnie 2^n wartościowań zbioru V_n : dokładnie tych wartościowań, które spełniają nieparzystą liczbę zmiennych z tego zbioru.

Matematyka II — Algebra

Zadanie 1. (4 punkty)

W przestrzeni Π_2 wielomianów stopnia ≤ 2 definiujemy iloczyn skalarny

$$\langle f, g \rangle = \int_0^2 x f(x) g(x) dx$$

Proszę wykonać ortogonalizację bazy potęgowej tej przestrzeni.

Zadanie 2. (5 punktów)

Znaleźć całkowite liczby a, b takie że $13a + 8b = 1$. (Odgadnięcie to 1p.)

Zadanie 3. (6 punktów)

Użyć chińskiego twierdzenia o resztach w celu wyznaczenia całkowitego x takiego, że $x \equiv_5 3$, $x \equiv_7 4$, $x \equiv_{13} 7$.

Progi punktowe: 5, 7, 9, 11, 13 punktów.

Metody Programowania

Poniższe zadania należy rozwiązać używając języka Plait lub OCaml.

Zadanie 1 Zdefiniuj funkcję `merge` scalającą dwie posortowane listy liczb do pojedynczej posortowanej listy liczb. Wszystkie elementy należące do list wejściowych (włącznie z powtórzeniami) powinny znaleźć się w liście wyjściowej.

Zadanie 2 Zdefiniuj funkcję-predykat sprawdzającą, czy lista będąca jej argumentem jest posortowana. Następnie udowodnij przez indukcję, że jeśli argumenty funkcji `merge` są posortowanymi listami, to wynik tej funkcji również jest posortowany.

Zadanie 3 Przyjmijmy, że funkcja `split`, przyjmująca jako argument listę liczb i zwracająca parę list liczb, jest już zdefiniowana. Zdefiniuj funkcję `mergesort` implementującą algorytm sortowania przez scalanie przy użyciu funkcji `split` i `merge`.

Zadanie 4 Udowodnij przez indukcję, że funkcja `mergesort` zwraca wyłącznie listy posortowane.

Matematyka dyskretna

Niech G będzie grafem o $n = 1000$ wierzchołkach, w którym każdy wierzchołek ma stopień co najmniej 500. Udowodnij, że G ma średnicę nie większą niż 2.

Algorytmy i struktury danych

Za rozwiązanie obydwu zadań z tej części można otrzymać w sumie do 9 punktów. Skala ocen: poniżej 3 punktów — ocena niedostateczna (egzamin niezdany), 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, 7 albo więcej punktów daje ocenę bardzo dobrą.

Zadanie 1: najdłuższy rosnący geometrycznie podciąg (4 punkty)

Dany jest n -elementowy ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ oraz ustalona stała $k > 1$ pełniąca rolę ilorazu ciągu geometrycznego. Należy wyznaczyć w tym ciągu najdłuższy podciąg rosnący co najmniej geometrycznie, w którym każda para sąsiednich wyrazów tego ciągu a_{j-1} i a_j spełnia warunek $a_{j-1} \leq k \cdot a_j$ dla $j > 1$.

Opracuj efektywny algorytm dynamiczny, który rozwiązuje to zadanie. Precyzyjnie opisz ideę rozwiązania a potem zapisz ją w pseudokodzie. Uzasadnij poprawność opisaney metody i oszacuj jej złożoność obliczeniową.

Zadanie 2: zadanie *off-line* dla usuwania elementu minimalnego ze zbioru dynamicznego (5 punktów)

Rozważmy ciąg operacji *insert*(i) oraz *extract-min*(), wykonywanych na zbiorze S , przy czym $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Obliczenia rozpoczynamy od zbioru pustego $S = \emptyset$. Instrukcja $S.insert(i)$ wstawia liczbę naturalną i do zbioru S : $S \leftarrow S \cup \{i\}$. Instrukcja $S.extract-min()$ usuwa najmniejszą liczbę naturalną ze zbioru S : $S \leftarrow S \setminus \min(S)$ o ile S jest niepusty.

Niech σ będzie ciągiem instrukcji *insert*(i) oraz *extract-min*() takim, że instrukcja $S.insert(i)$ występuje co najwyżej jeden raz dla każdej liczby naturalnej $1 \leq i \leq n$. Mając zadany ciąg instrukcji σ należy wyznaczyć ciąg liczb naturalnych usuniętych ze zbioru S przez kolejne instrukcje *extract-min*(). Zadanie jest typu *off-line* bo zakładamy, że cały ciąg instrukcji σ jest znany na początku obliczeń.

Rozwiąż to zadanie używając zbiorów rozłącznych.

- Opisz drzewiastą implementację struktury danych dla zbiorów rozłącznych (budowa węzła, reprezentant zbioru itp.) oraz operacji wykonywanych na tej strukturze: *union*(a, b) łączy dwa zbiory, których reprezentantami są elementy a i b ; *find*(c) znajduje reprezentanta zbioru, do którego należy c .
- Na czym polega łączenie według rang i wyszukiwanie z kompresją ścieżki? Zaisz w pseudokodzie procedurę *union*(a, b) z uwzględnieniem rang i procedurę *find*(c) z kompresją ścieżki.
- Jak zaadoptować zbiory rozłączne do rozwiązania opisanego zadania: przedstaw ideę algorytmu i szczegółowo go opisz.
- Jaka będzie złożoność czasowa opisanego algorytmu?
- Czy można to zadanie rozwiązać używając kolejki priorytetowej zamiast zbiorów rozłącznych? Odpowiedź uzasadnij.

Metody numeryczne

Za rozwiązanie zadań można otrzymać łącznie 12 punktów. Otrzymanie 4 pkt. gwarantuje ocenę dostateczną, próg dla dst+ to 5.5 pkt., dla db – 7 pkt., dla db+ 8.5 pkt., a dla bdb – 10 pkt.

1. **4 punkty** Czym jest *uwarunkowanie zadania*? Jakie ma ono znaczenie w kontekście wykonywania **obliczeń zmiennopozycyjnych**? **Uzasadnij**, że za wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości danej funkcji f w punkcie x można przyjąć wartość $|xf'(x)/f(x)|$.
2. **4 punkty** Pomiary (t_k, C_k) ($0 \leq k \leq N$; $t_k, C_k > 0$) pewnej zależnej od czasu wielkości fizycznej C sugerują, że wyraża się ona wzorem

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{t} + A \sin t + 3}.$$

Stosując aproksymację średniokwadratową, **wyznacz prawdopodobną** wartość stałej A .

3. **4 punkty** Opisz **metodę Romberga** przybliżonego całkowania funkcji ciągłej. W rozwiązaniu **uwzględnij aspekty numeryczne**, jak i te związane ze **złożonością obliczeniową**.

Języki formalne i złożoność obliczeniowa

Dla danego ciągu par liczb naturalnych $P = (a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$ takiego, że $(a_k, b_k) = (1, 1)$ definiujemy funkcję $f_P: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ w następujący sposób: dla $n \in \mathbb{N}$, definiujemy $f(n) = \frac{n}{a_i} \cdot b_i$, gdzie i to najmniejsza liczba spełniająca $a_i \mid n$. Zauważmy, że $i = k$ spełnia warunek z zadania, więc funkcja jest dobrze określona dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Jaka jest złożoność problemu *stabilizacji*:

- **Dane:** ciąg par liczb naturalnych $P = (a_1, b_1), \dots, (a_{k-1}, b_{k-1}), (1, 1)$
- **Pytanie:** czy ciąg iteracji f_P się stabilizuje, t.j., czy istnieje $i \in \mathbb{N}$ takie, że $(f_P)^i(n) = (f_P)^{i+1}(n)$?

Symbol $(f_P)^i$ oznacza i -krotne złożenie funkcji f_P .