INTERPOLACYJNE WZORY BARYCENTRYCZNE W PIERWIASTKACH KLASYCZNYCH WIELOMIANÓW ORTOGONALNYCH ZMIENNEJ CIĄGŁEJ I DYSKRETNEJ (BARYCENTRIC FORMULAE FOR INTERPOLATION AT ROOTS OF CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS OF CONTINUOUS AND DISCRETE VARIABLE)

PRZEMYSŁAW RUTKA I RYSZARD SMARZEWSKI

1. Streszczenie

W ostatnich latach numeryczne znaczenie wzoru interpolacyjnego Lagrange'a wzrosło za sprawą odkrycia jego barycentrycznej postaci (Berrut i Trefethen [SIAM Rev. 46 (2004), str. 501-517])

$$p(x) = l(x) \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) \frac{\sigma_\nu}{x - x_\nu}, \quad l(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Wprowadzenie wag barycentrycznych $\{\sigma_\nu\}_1^n$, zależących jedynie od węzłów interpolacji $\{x_\nu\}_1^n$, pozwoliło uzyskać atrakcyjne obliczeniowo własności, takie jak stabilność oraz wydajność. W szczególności, w przypadku jawnie określonych węzłów $\{x_\nu\}_1^n$, będących na przykład punktami równoodległymi lub punktami Chebyszewa $x_\nu = cos\left(\frac{2\nu-1}{2n}\pi\right)$, wagi barycentryczne $\{\sigma_\nu\}_1^n$ można podać *explicite*, a to z kolei umożliwia bardzo wydajne, rzędu $O(n)$, znajdowanie wartości wielomianu interpolacyjnego $p(x)$. W przypadku, gdy jawna postać węzłów $\{x_\nu\}_1^n$ nie jest znana, obliczenie wag $\{\sigma_\nu\}_1^n$ wymaga wykonania $O(n^2)$ działań, ale na szczęście wykonuje się je raz dla danej konfiguracji węzłów, niezależnie od ewaluacji samego wielomianu $p(x)$. Odkrycie przez Wanga i innych [Math. Comp. 81 (2012) str. 861-877 oraz Math. Comp. 83 (2014), str. 2893-2914] istnienia prostych zależności między wagami barycentrycznymi $\{\sigma_\nu\}_1^n$, a węzłami $\{x_\nu\}_1^n$ i wagami $\{\lambda_\nu\}_1^n$ kwadratur Gaussa

$$Q_n(f) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu f(x_\nu) \approx \int_a^b f(x)\, w(x)\, dx,$$

związanych z klasycznymi funkcjami wagowymi $w(x)$ typu Hermite'a, Laguerre'a i Jacobiego, otworzyło w tym zakresie nowe możliwości. Okazało się bowiem, że do obliczania wag barycentrycznych $\{\sigma_\nu\}_1^n$ z powodzeniem zastosować można algorytmy znajdujące węzły i wagi kwadratur Gaussa, wśród których metoda Glasera, Liu i Rokhlina [SIAM J. Sci. Comput. 29 (2007), str. 1420-1438] oraz metoda Hale'a i Townsenda [SIAM J. Sci. Comput. 35 (2013), str. A652-A674] charakteryzują się wysoką, liniową wydajnością.

Jako istotne uzupełnienie i rozszerzenie wspomnianych wyników zaproponowane zostały ostatnio w pracy (Rutka, Smarzewski [Math. Comp. 86 (2017), str. 2409-2427]) kolejne jawne reprezentacje wag barycentrycznych, które związane są nie tylko z intepolacją Lagrange'a, ale również z interpolacjami Fejéra i Hermite'a w węzłach dwukrotnych. W szczególności podane tamże zostały analogiczne zależności wiążące wagi barycentryczne każdej z rozważanych interpolacji z węzłami i wagami kwadratur Gaussa, odpowiadających mniej popularnym klasycznym funkcjom wagowym Bessla, Jacobiego na przedziale $(0, +\infty)$ oraz pseudo-Jacobiego. W ten sposób zwiększony został zakres stosowalności szybkich algorytmów znajdowania węzłów i wag kwadratur Gaussa do obliczania wag barycentrycznych. Dalsze poszukiwania reprezentacji wag barycentrycznych kontynuowane są w pracy (Rutka, Smarzewski [Difference inequalities and barycentric identities for classical discrete iterated weights, zaakceptowanej do druku w Math. Comp.]), gdzie sformułowane zostały wagi wzoru interpolacyjnego Lagrange'a w zerach klasycznych dyskretnych wielomianów ortogonalnych Charliera, Meixnera, Krawczaka, Hahna typu I i II oraz Czebyszewa. Warto zwrócić uwagę także na kwadratury iteracyjne badane w tej pracy.