

Algebra — Egzamin, I termin, rozwiązania

Zadanie 1 Dla przestrzeni liniowych $S = \text{LIN}(\{(1, 6, 5, 5, 3), (1, 2, 3, 2, 2)\})$ oraz $T = \text{LIN}(\{(3, 4, 5, 3, 3), (2, 1, 3, 1, 2)\})$ oblicz $\dim(S + T)$ oraz $\dim(S \cap T)$. Podaj dowolną bazę $S + T$.

Rozwiązanie

Łatwo zauważyć, że podany zbiór generatorów S ma dwa wektory niezależne (są różne, a mają taką samą pierwszą współrzędną), podobnie T ma wymiar 2. Będziemy korzystać z zależności:

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

Czyli wystarczy, że policzymy wymiar $S+T$. Suma (mnogościowa) generatorów S oraz T generuje $S+T$, zastosujemy metodę eliminacji Gaussa w celu obliczenia wymiaru.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{(3)-(2)-(4)} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)-(2), (4)-2 \cdot (2)} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{(1)-(3)+(4)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(4)+3 \cdot (3)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rząd $\text{LIN}(S + T)$ wynosi więc 3. Tym samym rząd $S \cap T$ wynosi więc 1.

Co do bazy $S+T$ zauważmy, że wektory uzyskane przez kombinacje liniowe zbioru wektorów rozpinających $S+T$ (czyli wierszy macierzy) dalej należą do $S + T$, tym samym trzy wektory

$$(1, 2, 3, 2, 2), (0, 1, -1, 0, -1), (0, 0, -6, -3, -5)$$

są bazą tej przestrzeni.

Zadanie 2 Rozważmy grupę G oraz jej dwie podgrupy H oraz K ; niech $g \in G$. Pokaż, że warstwa lewostronna g podgrupy $H \cap K$ jest przecięciem warstw lewostronnych elementu g dla H oraz dla K , innymi słowy:

$$(1) \quad g(H \cap K) = gH \cap gK .$$

Wynioskuj z tego, że przecięcie dwóch podgrup normalnych G jest podgrupą normalną G .

Rozwiązanie

Aby pokazać równość (1), pokażemy dwa zawierania: $g(H \cap K) \subseteq gH \cap gK$ oraz $g(H \cap K) \supseteq gH \cap gK$.

Pierwsze zawieranie jest proste: dowolny element należący do warstwy $g(H \cap K)$ jest postaci gf dla $f \in H \cap K$. Ale wtedy również $f \in H$ oraz $f \in K$, czyli gf jednocześnie należy do gH oraz do gK , czyli też do przecięcia $gH \cap gK$.

Drugie zawieranie jest również proste: rozważmy dowolny element należący do $gH \cap gK$. Jest on postaci gh oraz gk dla pewnych elementów $g \in H$ oraz $k \in K$, przy czym $gh = gk$. Jako że wszystkie elementy g, h, k pochodzą z jednej grupy G , oznacza to, że $h = k$. Czyli $h = k \in H \cap K$ i tym samym $gh \in g(H \cap K)$.

Aby pokazać drugą część zadania zauważmy, że w ten sam sposób możemy pokazać analogiczny fakt dla warstw prawostronnych, tzn.:

$$(2) \quad (H \cap K)g = Hg \cap Kg .$$

Niech teraz H, K będą podgrupami normalnymi. Chcemy pokazać, że $H \cap K$ również jest normalna, czyli że dla dowolnego elementu $g \in G$ zachodzi

$$g(H \cap K) = (H \cap K)g$$

Rozwińmy: z (1) wiemy, że

$$g(H \cap K) = gH \cap gK .$$

Ponieważ H oraz K są normalne, $gH = Hg$ oraz $gK = Kg$, czyli

$$gH \cap gK = Hg \cap Kg ,$$

i tym samym z (2) mamy:

$$Hg \cap Kg = (H \cap K)g ,$$

co kończy dowód.

Zadanie 3 Niech M, N będą macierzami symetrycznymi rozmiaru $n \times n$. Pokaż, że:

- $M + N$ jest macierzą symetryczną;
- MN jest macierzą symetryczną wtedy i tylko wtedy gdy M, N komutują (tj. $MN = NM$);
- jeśli M jest odwracalna, to również M^{-1} jest macierzą symetryczną.

Rozwiązanie

Niech $M = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ oraz $N = (b_{i,j})_{i,j=1}^n$, przy czym $a_{i,j} = a_{j,i}$ oraz $b_{i,j} = b_{j,i}$ dla wszystkich możliwych par i, j .

- Niech $C = M + N$. Wtedy

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} = a_{j,i} + b_{j,i} = c_{j,i}.$$

I tym samym C jest symetryczna.

- Przypomnijmy, że

$$(3) \quad (MN)^T = N^T M^T.$$

Założmy, że M, N komutują. Wtedy

$$(MN)^T \xrightarrow{\text{komutacja}} (NM)^T \xrightarrow{\text{z (3)}} M^T N^T \xrightarrow{M, N \text{ symetryczne}} MN$$

Czyli MN jest symetryczna.

Założmy, że MN jest symetryczna. Czyli

$$(MN)^T = MN.$$

Obliczmy lewą stronę tego równania:

$$(MN)^T \xrightarrow{\text{z (3)}} N^T M^T \xrightarrow{M, N \text{ symetryczne}} NM.$$

Czyli $MN = NM$ i tym samym macierze M, N komutują.

- Niech M będzie odwracalna. Wiemy, że dla dowolnej macierzy kwadratowej E zachodzi

$$(4) \quad (E^T)^{-1} = (E^{-1})^T.$$

Sprawdźmy, jak wygląda macierz transponowana do M^{-1}

$$(M^{-1})^T \xrightarrow{\text{z (4)}} (M^T)^{-1} \xrightarrow{M \text{ symetryczna}} M^{-1}$$

Czyli jest to macierz symetryczna.

Jeśli ktoś nie pamięta zależności (4), można ją łatwo udowodnić używając (3): wystarczy pokazać, że $E^T(E^{-1})^T = \text{Id}$

$$E^T(E^{-1})^T \xrightarrow{\text{z (3)}} (E^{-1}E)^T = (\text{Id})^T = \text{Id}.$$

Zadanie 4 Ile rozwiązań, w zależności od parametry λ , ma podany układ równań?

$$\begin{cases} 3x_1 & -x_2 & +4x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & -2x_2 & +6x_3 & = & 1 + \lambda \\ (6 + \lambda^2)x_1 & -3x_2 & +(9 - \lambda^2)x_3 & = & 3 \end{cases}.$$

Rozwiązanie

Podany układ równań zapisany w postaci macierzowej wygląda następująco

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ (6 + \lambda^2) & -3 & (9 - \lambda^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \lambda \\ 3 \end{bmatrix}$$

Jeśli wyznacznik macierzy głównej jest niezerowy, to ma on dokładnie jedno rozwiązanie. Policzmy więc wartość tego wyznacznika, użyjemy metody Sarrusa:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ (6 + \lambda^2) & -3 & (9 - \lambda^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \\ (6 + \lambda^2) & -3 \end{vmatrix} =$$

$$3 \cdot (-2) \cdot (9 - \lambda^2) + (-1) \cdot 6 \cdot (6 + \lambda^2) + 4 \cdot 5 \cdot (-3) - 4 \cdot (-2) \cdot (6 + \lambda^2) - 3 \cdot 6 \cdot (-3) - (-1) \cdot 5 \cdot (9 - \lambda^2) =$$

$$-54 + 6\lambda^2 - 36 - 6\lambda^2 - 60 + 48 + 8\lambda^2 + 54 + 45 + 5\lambda^2 =$$

$$-13 + 13\lambda^2 = 13(\lambda^2 - 1)$$

Zauważmy, że wartość wyznacznika głównego tego układu równań jest niezerowa dla $\lambda \notin \{1, -1\}$, czyli dla takich wartości układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Rozważmy więc pozostałe wartości. Zastosujemy w nich twierdzenia Kroneckera-Capellego: w tym celu musimy policzyć rząd macierzy głównej oraz rząd macierzy rozszerzonej tego układu. Rząd macierzy głównej jest taki sam dla $\lambda = 1$ oraz $\lambda = -1$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ 7 & -3 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-(2), (2)-(1)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Łatwo zauważyć, że ma ona rząd 2: wiersz drugi i trzeci są identyczne, zaś pierwszy i drugi różne (i mają tę samą drugą współrzędną).

Niech $\lambda = 1$, rozważamy macierz rozszerzoną, wykonujemy na niej takie same operacje, jak powyżej na macierzy głównej:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & 2 \\ 7 & -3 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-(2), (2)-(1)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Rząd tej macierzy również wynosi 2, gdyż, jak powyżej, wiersz drugi i trzeci są identyczne, zaś pierwszy i drugi: różne i mają taką samą drugą współrzędną. Czyli rząd macierzy głównej i macierzy rozszerzonej jest taki sam i z tw. Kroneckera-Capellego ten układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Dla $\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & 0 \\ 7 & -3 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-(2), (2)-(1)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-\frac{1}{2}(3), (1)-\frac{1}{2}(3)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)-(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Łatwo zauważyć, że rząd wynosi 3. Czyli rząd macierzy głównej jest mniejszy niż rząd macierzy rozszerzonej i z tw. Kroneckera-Capellego ten układ równań nie ma rozwiązań.

Zadanie 5 Rozważmy wielomian p oraz macierz kwadratową M . Pokaż, że

- jeśli M jest diagonalizowalna, to również $p(M)$ jest;
- jeśli λ jest wartością własną M , to $p(\lambda)$ jest wartością własną $p(M)$.

Rozwiązanie

Skoro M jest diagonalizowalna, to znaczy, że jest postaci

$$M = A^{-1}DA \text{ ,}$$

gdzie D jest macierzą przekątniową, zaś A jest macierzą odwracalną.

Zauważmy, że dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi

$$\begin{aligned} (5) \quad M^k &= (A^{-1}DA)^k = A^{-1}DAA^{-1}DA \dots A^{-1}DA = \\ &= A^{-1}D(AA^{-1})D(AA^{-1}) \dots (AA^{-1})DA = A^{-1}D(\text{Id})D(\text{Id}) \dots (\text{Id})DA = A^{-1}D^k A \text{ .} \end{aligned}$$

Niech $p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$. Wtedy

$$p(M) = \sum_{i=0}^m a_i M^i \stackrel{\text{z (5)}}{=} \sum_{i=0}^m a_i A^{-1}D^i A = A^{-1} \left(\sum_{i=0}^m a_i D^i \right) A \text{ .}$$

Łatwo zauważyć, że skoro jeśli D jest macierzą przekątniową, to również $a_i D^i$ jest macierzą przekątniową, czyli także ich suma. Tym samym $p(M)$ jest diagonalizowalna.

Co do wartości własnych, niech X będzie wektorem własnym dla wartości własnej λ . Zauważmy najpierw, że $M^k X = \lambda^k X$, co można łatwo pokazać przez indukcję po k : dla $k = 1$ zachodzi to, gdyż X jest wektorem własnym. Jeśli teza zachodzi dla k , to dla $k + 1$:

$$M^{k+1} X = M(M^k X) \stackrel{\text{z założenia indukcyjnego}}{=} M \lambda^k X \stackrel{\text{wyjęcie składowej}}{=} \lambda^k M X \stackrel{\text{z założenia indukcyjnego}}{=} \lambda^k \lambda X = \lambda^{k+1} X \text{ .}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} p(M) \cdot X &= \left(\sum_{i=0}^m a_i M^i \right) \cdot X \stackrel{\text{liniowość przekształcenia}}{=} \sum_{i=0}^m a_i (M^i \cdot X) \stackrel{\text{bo } M^i \cdot X = \lambda^i X}{=} \sum_{i=0}^m a_i \cdot \lambda^i \cdot X \\ &\stackrel{\text{liniowość przekształcenia}}{=} \left(\sum_{i=0}^m a_i \cdot \lambda^i \right) \cdot X = p(\lambda) X \end{aligned}$$

Zadanie 6 Dla wielomianów $f = x^5 - 3x^4 - x^3 + 7x^2 - 4$, $g = x^3 - 3x^2 + 2x$ z $\mathbb{R}[X]$ podziel (z resztą) f przez g . Oblicz też $\gcd(f, g)$ i przedstaw je w postaci $af + bg$ dla odpowiednich wielomianów $a, b \in \mathbb{R}[X]$.

Rozwiązanie

Podzielmy wielomiany f oraz g z resztą:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 + 2x \overline{) \begin{array}{r} x^5 - 3x^4 - x^3 + 7x^2 - 4 \\ - x^5 + 3x^4 - 2x^3 \\ \hline - 3x^3 + 7x^2 \\ 3x^3 - 9x^2 + 6x \\ \hline - 2x^2 + 6x \end{array}} \\
 \begin{array}{r} x^2 - 3 \\ - 4 \end{array}
 \end{array}$$

Czyli $x^5 - 3x^4 - x^3 + 7x^2 - 4 = (x^3 - 3x^2 + 2x)(x^2 - 3) + (-2x^2 + 6x - 4)$.

Dzielenie to jest pierwszym krokiem w algorytmie Euklidesa obliczania $\gcd$ wielomianów, w którym korzystamy z faktu:

$$\gcd(af + b, f) = \gcd(b, f).$$

Tym samym pozostaje nam policzenie $\gcd(-2x^2 + 6x - 4, x^3 - 3x^2 + 2x)$.

$$\begin{array}{r}
 - 2x^2 + 6x - 4 \overline{) \begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 2x \\ - x^3 + 3x^2 - 2x \\ \hline 0 \end{array}} \\
 \begin{array}{r} - \frac{1}{2}x \end{array}
 \end{array}$$

Tj., $x^3 - 3x^2 + 2x = (-\frac{1}{2}x)(-2x^2 + 6x - 4)$ i w takim razie $\gcd(-2x^2 + 6x - 4, x^3 - 3x^2 + 2x)$ to $-2x^2 + 6x - 4$.

Tym samym poszukiwany największy wspólny dzielnik f oraz g to

$$-2x^2 + 6x - 4 = 1 \cdot (x^5 - 3x^4 - x^3 + 7x^2 - 4) + (-x^2 + 3) \cdot (-2x^2 + 6x - 4).$$

Zadanie 7 Dla standardowego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^4$ zortonormalizuj podany układ wektorów. Uzupełnij go do bazy ortonormalnej.

$$\{(4, 4, -2, 0); (1, 4, 1, 0); (5, -4, -7, 1)\} .$$

Rozwiązanie

Oznaczmy zadane wektory jako v_1, v_2, v_3 . Dokonamy najpierw ortonormalizacji bazy metodą Gramma-Schmidta; niech v'_1, v'_2, v'_3 to wektory po tym procesie.

Długość wektora v_1 to $\sqrt{16+16+4}=6$, czyli pierwszy wektor ortonormalny z bazy to

$$v'_1 = \frac{1}{6} \cdot v_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right).$$

Liczymy iloczyn tego wektora (v'_1) i wektora drugiego (v_2):

$$\langle v'_1, v_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right); (1, 4, 1, 0) \right\rangle = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

I tym samym

$$v_2 - 3v'_1 = (1, 4, 1, 0) - (2, 2, -1, 0) = (-1, 2, 2, 0)$$

Jego długość to $\sqrt{1+4+4}=3$ i tym samym

$$v'_2 = \frac{1}{3}(-1, 2, 2, 0) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$$

Obliczamy teraz iloczyny skalarne $\langle v'_1, v_3 \rangle$ oraz $\langle v'_2, v_3 \rangle$:

$$\langle v'_1, v_3 \rangle = \left\langle \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right); (5, -4, -7, 1) \right\rangle = \frac{1}{3}(10 - 8 + 7) = \frac{9}{3} = 3$$

$$\langle v'_2, v_3 \rangle = \left\langle \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right); (5, -4, -7, 1) \right\rangle = \frac{1}{3}(-5 - 8 - 14) = -\frac{27}{3} = -9$$

Obliczamy $v_3 - 3v'_1 + 9v'_2$:

$$(5, -4, -7, 1) - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) + 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) = (5 - 2 - 3, -4 - 2 + 6, -7 + 1 + 6, 1) = (0, 0, 0, 1)$$

Wektor ten ma długość 1, czyli

$$v'_3 = (0, 0, 0, 1).$$

Aby rozszerzyć ten układ wektorów do bazy ortonormalnej, należy dodać do niej jeden wektor (niezależny) i następnie zortonormalizować cały układ. Weźmy wektor $v_4 = (1, 0, 0, 0)$: ma on niewiele współrzędnych i nie wygląda, żeby był liniowo zależny od pozostałych:

$$\langle v'_1, v_4 \rangle = \frac{2}{3}$$

$$\langle v'_2, v_4 \rangle = -\frac{1}{3}$$

$$\langle v'_3, v_4 \rangle = 0$$

Obliczamy $v_4 - \frac{2}{3}v'_1 + \frac{1}{3}v'_2$:

$$(1, 0, 0, 0) - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) = \left(1 - \frac{4}{9} - \frac{1}{9}, 0 - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}, 0 + \frac{2}{9} + \frac{2}{9}, 0\right) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, 0\right)$$

Długość tego wektora to:

$$\sqrt{\frac{1}{81}(16+4+16)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Po przemnożeniu dostajemy

$$v'_4 = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, 0\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right),$$

który to wektor jest dopełnieniem do bazy ortonormalnej.

Zadanie 8 Rozważmy grupę obrotów i symetrii (odbić) sześciokąta foremnego. Ile ma ona elementów?

Malujemy każdy bok sześciokąta foremnego na jeden z sześciu kolorów (niebieski i czerwony); sześciokąty uznajemy za nierozróżnialne, jeśli można jeden przekształcić na drugi przez obrót lub symetrię. Ile jest takich rozróżnialnych sześciokątów?

Rozwiązanie

Przypomnijmy, że dla dowolnej grupy działającej na zbiorze i dowolnego elementu x tego zbioru zachodzi:

$$|G| = |O_x| \cdot |G_x| ,$$

gdzie O_x jest orbitą x , zaś G_x stabilizatorem x . Użyjemy tej zależności w celu policzenia rzędu G .

Naszym zbiorem będą krawędzie sześciokąta, zaś grupa to obroty i symetrie tegoż sześciokąta. Ustalmy jeden bok tego sześciokąta. Zauważmy, że każdy bok można przeprowadzić na każdy inny, tym samym wielkość orbity boku wynosi 6. Jednocześnie wielkość stabilizatora to 2: jeśli ustalimy jeden bok, to są jedynie dwa przekształcenia, po których pozostaje on na miejscu: identyczność oraz symetria przechodząca przez środek tego boku; czyli wielkość stabilizatora to 2. Czyli grupa wszystkich obrotów i symetrii ma $6 \cdot 2 = 12$ elementów. Jednocześnie łatwo sprawdzić, że zawiera ona 6 obrotów (o 0 , $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π , $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$) oraz 6 symetrii (3 przechodzące przez pary przeciwległych boków oraz 3 przez pary przeciwległych wierzchołków).

W celu obliczenia ilości rozróżnialnych sześciokątów skorzystamy z lematu Burnside'a:

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{fix}(g) ,$$

gdzie $\mathcal{O}$ to zbiór orbit zbioru, G to grupa, zaś $\text{fix}(g)$ to elementy x takie że $g(x) = x$. Zauważmy, że ilość orbit w działaniu grupy obrotów i symetrii na zbiorze pokolorowanych sześciokątów to dokładnie ilość takich rozróżnialnych sześciokątów. W tym celu musimy policzyć ilość punktów stałych każdego przekształcenia. Pomocne będzie rozpisanie każdego przekształcenia jako permutacji (numerujemy boki 1, 2, 3, ..., 6 przeciwnie do ruchu wskazówek zegara)

- identyczność: $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$ ma 6^6 punktów stałych: każdy bok możemy pokolorować na inny kolor.
- obrót o $\frac{\pi}{3}$. Jako permutacja wygląda on tak: $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Tym samym, aby wielokąt był punktem stałym tego przekształcenia, musi mieć wszystkie boki w tym samym kolorze. Czy jest 6 możliwych takich wielokątów.
- $\frac{2\pi}{3}$. W rozbiciu na cykle to przekształcenie wygląda następująco: $(1, 3, 5)(2, 4, 6)$. Czyli jest 6^2 takich możliwych sześciokątów: malujemy boki 1, 2, 3 na jeden kolor a 2, 4, 6 na drugi.
- π . W rozbiciu na cykle to przekształcenie wygląda następująco: $(1, 4)(2, 5)(3, 6)$. Czyli jest 6^3 takich możliwych sześciokątów.
- obrót o $\frac{4\pi}{3}$. Rozbicie na cykle: $(1, 5, 3)(2, 6, 4)$. Czyli ilość punktów stałych jest taka sama, jak dla obrotu o $\frac{2\pi}{3}$, tj. 6^2 .
- obrót o $\frac{5\pi}{3}$. Rozbicie na cykle: $(1, 6, 5, 4, 3, 2)$. Czyli podobnie, jak obrót o $\frac{\pi}{3}$: mamy 6 punktów stałych.
- symetria przez przeciwległe boki (są 3 takie symetrie), np. 1-4. Rozbicie na cykle to $(1)(4)(2, 6)(3, 5)$. Czyli jest 6^4 punktów stałych.
- symetria przez przeciwległe wierzchołki (są 3 takie symetrie), np. ten między bokami 1-2 oraz 4-5. Rozbicie na cykle to $(1, 2)(6, 3)(4, 5)$. Czyli jest 6^3 punktów stałych.

Z lematu Burnside'a ilość orbit to

$$\frac{1}{12}(6^6 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6^2 + 6^3 + 3 \cdot 6^4 + 3 \cdot 6^3).$$

Zadanie 9 Rozważmy grupę permutacji S_n . Pokaż, że jeśli g i h są rozłącznymi cyklami, to rząd gh jest najmniejszą wspólną wielokrotnością rzędów f oraz g .

Rozważmy permutację:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 3 & 10 & 1 & 13 & 14 & 9 & 6 & 4 & 12 & 5 & 2 & 11 & 8 \end{pmatrix}.$$

Podaj permutację odwrotną σ^{-1} . Rozłóż σ oraz σ^{-1} na cykle. Jakie są rzędy permutacji σ oraz σ^{-1} ?

Rozwiązanie

Rozwiązanie pierwszej części korzysta z paru prostych faktów:

Fakt 1. *Jeśli f, f' są cyklami rozłącznymi, to również f^n, f'^m są cyklami rozłącznymi*

Zachodzi to, bo cykl f^n ma dziedzinę nie większą niż f .

Fakt 2. *Jeśli cykle $f_1, f_2, \dots, f_k$ są parami rozłączne to*

$$(f_1^{m_1} \cdot f_2^{m_2} \cdots f_k^{m_k}) \cdot (f_1^{n_1} \cdot f_2^{n_2} \cdots f_k^{n_k}) = (f_1^{m_1+n_1} \cdot f_2^{m_2+n_2} \cdots f_k^{m_k+n_k})$$

Korzystamy z tego, że cykle te są rozłączne i tym samym są przemienne, możemy je odpowiednio pogrupować.

Pokażemy teraz trochę silniejszy fakt: jeśli cykle $f_1, f_2, \dots, f_k$ są parami rozłączne oraz mają rzędy $n_1, n_2, \dots, n_k$, to ich rząd to najmniejsza wspólna wielokrotność $n_1, n_2, \dots, n_k$ (dla ułatwienia nazwijmy ją n).

Zauważmy, że

$$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_k)^n = (f_1^n \cdot f_2^n \cdots f_k^n) = (\text{Id} \cdot \text{Id} \cdots \text{Id}) = \text{Id}$$

Czyli rząd tej permutacji jest dzielnikiem n . Pozostaje pokazać, że jeśli m jest rzędem permutacji, to jest też wielokrotnością n . Policzymy

$$\text{Id} = (f_1 \cdot f_2 \cdots f_k)^m = (f_1^m \cdot f_2^m \cdots f_k^m)$$

Jako że wszystkie te cykle są rozłączne, każdy z nich musi być identycznością. Czyli m jest wielokrotnością $n_1, n_2, \dots, n_k$. Ale to oznacza, że m jest wielokrotnością n , co należało pokazać.

Permutacją odwrotną σ^{-1} do σ jest

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 4 & 11 & 2 & 9 & 11 & 8 & 1 & 14 & 7 & 3 & 13 & 10 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Rozkłady σ i σ^{-1} na cykle wyglądają następująco:

$$\sigma = (1, 7, 9, 4)(2, 3, 10, 12)(5, 13, 11)(6, 14, 8)$$

$$\sigma^{-1} = (1, 4, 9, 7)(2, 12, 10, 2)(5, 11, 13)(6, 8, 14)$$

Używając faktu z początku zadania łatwo zauważyć, że rząd σ to najmniejsza wspólna wielokrotność $\{4, 4, 3, 3\}$, czyli 12.

Rząd permutacji oraz permutacji odwrotnej jest taki sam, czyli rząd σ^{-1} również wynosi 12.