Algebra — Kolokwium 2

Czas: 150 minut.

W rozwiązaniach zaleca się podawanie kroków pośrednich obliczeń, tak aby były one weryfikowalna nawet w przypadku błędu rachunkowego.
Proszę podpisać (tylko numerem indeksu) wszystkie kartki. (Ta kartka jest przeznaczona na brudnopis).

Numer indeksu:..................

Zadanie 1 Rozważmy skończenie-wymiarową przestrzeń liniową V z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oraz jej podprzestrzeń W. Niech $X^\perp$ oznacza dopełnienie ortogonalne X, tj.:

$$X^\perp = \{v \in V \ : \ \forall_{x \in X} \langle v, x \rangle = 0\}.$$

Udowodnij, że $(W^\perp)^\perp = W$. Możesz założyć, że dopełnienie ortogonalne jest podprzestrzenią liniową V.

Numer indeksu:. . . . .

Zadanie 2 Wykonaj następujące działania $\mod 3$ oraz $\mod 5$.

- $(-25)^3 + 121 - ((-532) \cdot 263) + 1505 \cdot (-2)^7 - (-2)^6$;
- $(153^2 \cdot 3424^2) \cdot (172^3 - (-175) \cdot 231) + 1324^2 + (-1)^{10}$.

Numer indeksu:. . . . .

Zadanie 3 Rozważamy kwadraty, których krawędzie mogą mieć jeden z trzech kolorów: niebieski, zielony, czerwony. Dwa kwadraty uznajemy za identyczne, jeśli jeden można uzyskać z drugiego poprzez obrót lub symetrię. Ile jest takich rozróżnialnych kwadratów z tak pokolorowanymi bokami?

Numer indeksu:..................

Zadanie 4 Rozważmy permutację

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 1 & 2 & 9 & 8 & 3 & 5 & 10 & 6 \end{pmatrix} .$$

Podaj permutację odwrotną σ^{-1}. Rozłóż σ oraz σ^{-1} na cykle. Która z permutacji σ, σ^{-1} jest parzysta?

Numer indeksu:..................

Zadanie 5 Udowodnij, że jeśli G jest podgrupą grupy permutacji S_n to

- zbiór G_p permutacji parzystych z G jest podgrupą G;
- $|G_p| = |G|$ lub $|G_p| = \frac{|G|}{2}$.

Numer indeksu:. . . . .

Zadanie 6 Niech grupa G działa na zbiorze S. Przez G_s oznaczmy stabilizator elementu s, tj. $\{g \in G : g(s) = s\}$. Pokaż, że przecięcie wszystkich stabilizatorów $\bigcap_{s \in S} G_s$ jest podgrupą normalną w G.

Numer indeksu:. . . . .

Zadanie 7 Dla podanych podzbiorów grupy permutacji S_4 określ, czy są one podgrupami S_4 (permutacje podane są jako rozkłady na cykle; e oznacza permutację identycznościową). Jeśli podany zbiór jest podgrupą, wystarczy odpowiedź „TAK". Jeśli nie jest, to odpowiedź „NIE" uzasadnij.

- $\{(1234); (1432); (13)(24); e\}$;
- $\{(12)(34); (13)(24); e\}$;
- $\{(12)(34); e\}$;
- $\{(13); (24); (14)(23); (12)(34); (1234); (13)(24); (1432); e\}$;
- $\{(12)(34); (13)(24); (14)(23); e\}$;
- $\{(1234); (12)(34); e\}$;
- $\{(1234); (1432); (13)(24); (1324); (1423); (12)(34); e\}$.