Algebra - Lista 1

Zadanie 1. Rozważmy zbiór funkcji $\mathcal{F}$ postaci $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, gdzie p, q są wielomianami o współczynnikach z $\mathbb{R}$. Zdefiniujmy relację $\sim$ na takich funkcjach: $f \sim h$ jeśli $f(x) = h(x)$ nie zachodzi dla jedynie skończonej ilości $x \in \mathbb{R}$ (równość ta w szczególności nie zachodzi, gdy jedna z wartości $f(x), g(x)$ nie jest określona, a druga jest). Pokaż, że jest to relacja równoważności. Pokaż, że $\mathcal{F}/_\sim$ jest ciałem, gdzie dodawanie i mnożenie jest „punktowe": $([f]_\sim + [g]_\sim)(x) = f(x) + g(x)$ oraz $([f]_\sim \cdot [g]_\sim)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Zadanie 2. Pokaż, że zbiór liczb $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ jest ciałem (ze zwykłym dodawanie i mnożeniem).

Zadanie 3. Pokaż, że zbiór $\mathbb{R}$ ze zwykłym dodawaniem oraz mnożeniem $a \cdot b := ab\sqrt{2}$ jest ciałem. Jak wygląda „jedynka" w tym ciele?

Zadanie 4. Przedstaw wektor w jako kombinację podanych wektorów $a_1, a_2, \dots, a_k$ (lub uzasadnij, że to niemożliwe), nad ciałem $\mathbb{R}$:

(1) $w = (1, 5)$, $a_1 = (1, 1)$, $a_2 = (2, 0)$.
(2) $w = (5, 10, 11)$, $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (0, 3, 2)$, $a_3 = (1, 1, 1)$.
(3) $w = (5, 10, 11)$, $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (0, 3, 2)$, $a_3 = (1, 8, 7)$.
(4) $w = (4, 17, 18)$, $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (0, 3, 2)$, $a_3 = (3, 9, 11)$.

Zadanie 5. Niech S, T będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Pokaż, że $S \cap T$ oraz $S + T$ zdefiniowane jako

$$S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}$$

są odpowiednio: największą przestrzenią zawartą w S, T oraz najmniejszą zawierającą S i T.

Zadanie 6. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{Z}_3^3$ (zbiór trzyelementowych ciągów elementów z $\mathbb{Z}_3$, nad ciałem $\mathbb{Z}_3$). Ile wektorów należy do $\mathrm{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 1))$? A ile do $\mathrm{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 2))$?

Zadanie 7. Niech V, przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{K}$, $A = \{v_1, v_2 \dots, v_k\} \subseteq V$ zbiór wektorów, zaś $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ ciąg skalarów, gdzie $\alpha_1 \neq 0$. Pokaż, że

$$\mathrm{LIN}\left(\left\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i, v_2 \dots, v_k\right\}\right) = \mathrm{LIN}\left(\{v_1, v_2 \dots, v_k\}\right). \tag{1}$$

Wywnioskuj stąd, że $\{v_1, v_2 \dots, v_k\}$ jest bazą V wtedy i tylko wtedy, gdy bazą jest

$$\left\{\sum_{i=1}^{1} \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{2} \alpha_i v_i, \dots, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right\},$$

gdzie wszystkie skalary $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ są niezerowe.

Kryterium (1) jest podstawą metody eliminacji i jest bardzo wygodne przy sprawdzaniu liniowej niezależności. Możesz go używać, nawet jeśli nie potrafisz go udowodnić.

Zadanie 8. Pokaż, że U jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $u \in U$ zachodzi $\mathrm{LIN}(U) \neq \mathrm{LIN}(U \setminus \{u\})$.

Jw.: kryterium z Zadania 8 jest bardzo przydatne i możesz go używać nawet jeśli nie potrafisz go uzasadnić.

Zadanie 9. Czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne (nad $\mathbb{R}$)?

(1) $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 1)$
(2) $(0, 1, 2), (1, 1, 1), (1, 1, 1)$
(3) $(1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 1), (0, 2, 1, 1), (0, 0, 1, 1)$
(4) $(1, 2, 0, 0), (2, 2, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (2, 1, 0, 1)$
(5) $(1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 2), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 2)$
(6) $(1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 2), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)$

Zadanie 10. Sprawdź, czy następujące podzbiory $\mathbb{R}^n$ są podprzestrzeniami liniowymi:

(1) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 0\}$
(2) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - c = 0\}$
(3) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 2a - c = 0\}$
(4) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 0\}$
(5) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| = 1\}$
(6) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = a\}$