Algebra - Lista 2

Zadanie 1. Niech S, T będą skończenie-wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V. Pokaż, że

$$\dim(S) + \dim(T) = \dim(S \cap T) + \dim(S + T).$$

Zadanie 2. Niech $V' < V$ będzie podprzestrzenią liniową, zaś U i U' jej warstwami. Pokaż, że

$$U = U' \text{ lub } U \cap U' = \emptyset.$$

Zadanie 3. Pokaż równoważność następujących warunków (dla $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$):

- Zbiór B jest liniowo niezależny.
- Wektor $\vec{\mathbf{0}}$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B.
- Pewien wektor z $\mathrm{LIN}(B)$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B.
- Każdy wektor z $\mathrm{LIN}(B)$ ma najwyżej jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B.

Zadanie 4. Rozważamy przestrzenie nad $\mathbb{R}$. Niech $v_1, v_2, \ldots, v_n$ będą liniowo niezależne. Dla jakich wartości α zbiory wektorów

- $\{\alpha v_1 + v_2, v_1 + \alpha v_2\}$
- $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + \alpha v_1\}$

są liniowo niezależne?

Zadanie 5. Niech M będzie zbiorem skończonym. Na zbiorze jego podzbiorów 2^M określamy operacje:

$$U + V := V \triangle U, \quad 1 \cdot U = U, \quad 0 \cdot U = \emptyset,$$

gdzie $\triangle$ oznacza różnicę symetryczną, tj. $U \triangle V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$. Pokaż, że tak określony zbiór jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Z}_2$. Jaki jest jej wymiar?
Wsk. Istnieje bardzo „prosta” baza.

Zadanie 6. Dla zbioru określonego powyżej, niech $V_1, V_2, \ldots, V_k \subseteq M$ są takie, że dla każdego i, j zbiór V_i nie jest podzbiorem sumy pozostałych zbiorów, tj. $\bigcup_{j \neq i} V_j$. Pokaż, że $V_1, V_2, \ldots, V_k$ są liniowo niezależne.

Zadanie 7. Wyznacz wymiary $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S) + \mathrm{LIN}(T)$ dla

- $S = \{(1,2,0,1), (1,1,1,0)\}$, $T = \{(1,0,1,0), (1,3,0,1)\}$;
- $S = \{(1,1,1,1), (1,-1,1,-1), (1,3,1,3)\}$, $T = \{(1,2,0,2), (1,2,1,2), (3,1,3,1)\}$;
- $S = \{(2,-1,0,-2), (3,-2,1,0), (1,-1,1,-1)\}$, $T = \{(3,-1,-1,0), (0,-1,2,3), (5,-2,-1,0)\}$.

Zadanie 8. Na wykładzie pokazaliśmy, że ciągi spełniające równanie:

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2} - 1$$

są warstwą. Pokaż, że jest to warstwa względem przestrzeni ciągów spełniających równanie

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}.$$

Zadanie 9. Załóżmy, że V jest przestrzenią skończenie-wymiarową. Niech U-zbiór liniowo niezależny a $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ będzie bazą. Pokaż, że albo U jest bazą, albo istnieje $v_i \in \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, taki że $\{v_i\} \cup U$ jest liniowo niezależny.

Zadanie 10. Dla poniższych zbiorów wektorów sprawdź, czy są one bazą przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Jeśli nie, to wybierz z nich maksymalny zbiór liniowo niezależny X i podaj dowolny zbiór wektorów Y, taki że $X \cup Y$ jest bazą.

- $\{(1,0,-1,2), (2,3,4,1), (0,0,1,0)\}$
- $\{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,0,1,1), (0,1,0,1)\}$
- $\{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$
- $\{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$
- $\{(1,0,1,0), (1,0,0,1), (2,0,1,1), (-1,0,1,-2)\}$