# Algebra - Lista 4

**Zadanie 1** Znajdź wszystkie macierze $A$ wymiaru $2 \times 2$ spełniające warunek $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

*Wskazówka*: Zastanów się najpierw, ile może wynosić $\mathrm{rk}(A)$, skoro $\mathrm{rk}(A^2) = 0$.

**Zadanie 2** Dla przypomnienia: minor $A$ to dowolna macierz utworzona z $A$ poprzez usunięcie pewnego zbioru kolumn i pewnego zbioru wierszy (alternatywnie: wybieramy zbiór wierszy $R$ i zbiór kolumn $C$ bierzemy jedynie elementy $a_{ij}$, takie że $i \in R$, $j \in C$).

Pokaż, że dla (niekoniecznie kwadratowej) macierzy $A$ zachodzi:

$$\mathrm{rk}(A) = \max\{\mathrm{rk}(A') \ : \ A' \text{ jest macierzą kwadratową i minorem } A\}.$$

Wywnioskuj z tego, że

$$\mathrm{rk}(A) = \max\{n \ : \ A \text{ ma minor } A' \text{ wymiaru } n \times n, \text{ taki że } \det(A') \neq 0\}.$$

*Wskazówka: skorzystaj z faktu, że rząd kolumnowy i wierszowy są sobie równe.*

**Zadanie 3** Rozważmy macierze $A$ wymiaru $n \times n$, $C$ wymiaru $m \times m$, $B$ wymiaru $m \times n$ i macierz wymiaru $n \times m$ złożoną z samych 0 (zapiszmy ją jako $\mathbf{0}$). Wtedy notacja

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B & C \end{bmatrix}$$

oznacza macierz uzyskaną poprzez zestawienie obok siebie odpowiednich macierzy (tj. macierz $A$ wypełnia lewy górny róg, macierz $B$ lewy dolny, macierz $C$ prawy dolny a macierz $\mathbf{0}$ prawy górny). Pokaż, że

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(C).$$

**Zadanie 4** Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

**Zadanie 5** Niech $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{bmatrix}$. Oblicz $AA^T$ i jej wyznacznik. Wywnioskuj z tego, ile wynosi $\det(A)$.

**Zadanie 6** Liczby 144228, 532270, 257567, 209270, 289017, 519792 są podzielne przez 17. Udowodnij, że

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & 9 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

też dzieli się przez 17. W miarę możliwości — bez obliczania tego wyznacznika.

*Wskazówka*: metoda eliminacji.

**Zadanie 7** Oblicz wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix}.$$

**Zadanie 8** Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}.$$

**Zadanie 9** Rozważmy macierz (wymiaru $n \times n$)

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pokaż, że $\det(A) = f_n$, gdzie $f_n$ jest $n$-tą liczbą Fibonacciego (tj. $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$).

**Zadanie 10** Niech $q_1, q_2, \ldots, q_n$ będą dowolnymi liczbami. Macierz ($n \times n$) Vandermonde'a $V_n$ ma wyrazy równe $v_{ij} = q_i^{j-1}$, tj.:

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & \dots & q_1^{n-1} \\ 1 & q_2 & q_2^2 & \dots & q_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q_n & q_n^2 & \dots & q_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Udowodnij, że

$$\det(V_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (q_j - q_i).$$

W szczególności pokaż, że jeśli $q_i$ są niezerowe i parami różne, to wyznacznik ten jest niezerowy.

**Zadanie 11** Podane na wykładzie rozwinięcie Laplace'a zdefiniowane jest dla pierwszej kolumny. Uogólnij je na dowolną kolumnę i wiersz, tj. pokaże, że dla dowolnego $j$ zachodzi

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij})$$

oraz dla dowolnego $i$ zachodzi

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij}),$$

gdzie $A_{ij}$ jest minorem powstałym przez wykreślenie $i$-tego wiersza oraz $j$-tej kolumny.
*Wskazówka*: wystarczy transpozycja i zamiana kolumn.