Algebra - Lista 5

Zadanie 1 Zadanie to polega na pokazaniu alternatywnego dowodu tw. Cauchy'ego.

Niech A, B, C będą macierzami wymiaru $n \times n$, gdzie $C = AB$ oraz $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) = n$. Rozważ macierz $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -\mathrm{Id} & B \end{bmatrix}$. Ile wynosi jej wyznacznik?

Pokaż, że przy pomocy operacji kolumnowych (tj. zamiany kolumn i dodawania do kolumny wielokrotności innej kolumny) można macierz $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -\mathrm{Id} & B \end{bmatrix}$ przekształcić do macierzy $\begin{bmatrix} A & C \\ -\mathrm{Id} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ a tą do macierzy $\begin{bmatrix} C & A \\ \mathbf{0} & -\mathrm{Id} \end{bmatrix}$. Ile wynosi wyznacznik tej macierzy?

Dla przypomnienia: dowód poprawności algorytmu obliczania macierzy odwrotnej (przy użyciu metody eliminacji na wierszach macierzy) polegał na przekształcaniu równania $AA^{-1} = \mathrm{Id}$ poprzez (lewostronne) mnożenie przez macierze T_{ij} oraz $\mathrm{Id} + \alpha 1_{ij}$.

Zadanie 2 Rozważmy macierz diagonalną $D = D(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, tj. taką, która ma na przekątnej wyrazy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a poza przekątną zera, oraz macierze A, B odpowienio wymiarów $m \times n$ oraz $n \times m$. Jak wyglada macierz AD a jak macierz DB?

Korzystając z tego faktu rozszerz algorytm obliczania macierzy odwrotnej o możliwość mnożenia wierszy przez stałą.

Zadanie 3 Niech A, B będą macierzami odwracalnymi. Pokaż, że

- AB też jest macierzą odwracalną i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Zadanie 4 Sprawdź, czy podane poniżej macierze są odwracalne i podaj ich macierze odwrotne:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5 Pokaż, że każdą macierz odwracalną A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej ilości) macierzy ze zbioru

$$\{T_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n} \cup \{\mathrm{Id} + \alpha 1_{ij}\}_{\substack{i,j=1,\ldots,n \\ \alpha \in K}} \cup \{D(1, \ldots, 1, \underbrace{\alpha}_{i\text{-te miejsce}}, 1, \ldots)\}_{\substack{i,j=1,\ldots,n. \\ \alpha \in K}}$$

Wskazówka: Odwróć metodę eliminacji.

Zadanie 6 Ile rozwiązań ma układ równań

$$\begin{bmatrix} 5 & p & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ p & p & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2+p \end{bmatrix}$$

w zależności od wartości parametru p?

Zadanie 7 Ile rozwiązań mają poniższe układy równań (w zależności od parametru p):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2p \\ p \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} p & p & p \\ 1 & p & p \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \end{bmatrix}$$

Zadanie 8 Rozwiąż przy użyciu wzorów Cramera (tj. $x_i = \frac{\det(A_{x_i})}{\det(A)}$) równania:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 9 Wyznacz bazy jądra przekształceń (dowolny sposób):

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 11 & 17 & -8 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 6 & 9 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Zadanie 10 Rozważmy układ równań $AX = B$. Udowodnij, że układy uzyskane przez:

- zamianę i-tego oraz j-tego równania
- dodanie do j-tego równania wielokrotności i-tego
- przemnożenie i-tego równania przez stałą $\alpha \neq 0$

mają ten sam zbiór rozwiązań, co oryginalny układ.

Wskazówka: Można na palcach, ale prościej jest używając macierzy T_{ij}, $\mathrm{Id} + \alpha 1_{ij}$ oraz $D(1, 1, \ldots, \alpha, 1, \ldots)$.