Algebra - Lista 6

Zadanie 1 Podaj jedno rozwiązanie szczególne oraz postać rozwiązania ogólnego dla:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9 & 6 & 7 & 10 \\ -6 & 4 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & -11 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Preferowana metoda eliminacji.

Zadanie 2 Zbadaj ilość rozwiązań w zależności od parametru λ. Podaj jedno rozwiązanie układu (jeśli istnieje):

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3 Zbadaj ilość rozwiązań w zależności od parametru λ. Podaj jedno rozwiązanie układu (jeśli istnieje):

$$\begin{bmatrix} -6 & 8 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 7 & 3 \\ -3 & 5 & 4 & 2 \\ -3 & 7 & 17 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4 Niech

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

będzie macierzą przekształcenia $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ w bazie standardowej $(1, 0)$, $(0, 1)$. Weźmy nową bazę: $(1, 1)$, $(1, -1)$. Jak wygląda macierz przekształcenia L w tej bazie?

Zadanie 5 Rozważmy $\mathbb{R}^n$. Znajdź macierze przejścia z bazy standardowej do baz (w odpowiednich wymiarach)

$$\{(1, 1),(1, 0)\}, \{(0, 1),(1, 0)\}, \{(0, 1),(2, 0)\}, \{(1, 1, 1),(1, 1, 0),(1, 0, 0)\},$$

Zadanie 6 Mówimy, że dwie macierze M, N wymiaru $n \times n$ są *podobne*, gdy istnieje macierz odwracalna A, taka że

$$M = ANA^{-1}.$$

- Pokaż, że relacja bycia podobnym jest relacją równoważności.
- Udowodnij, że λ jest wartością własną M wtedy i tylko wtedy, gdy jest wartością własną N.

Wskazówka do drugiego punktu: rozpatrz wektor v oraz Av i działanie N oraz M na nich.

Zadanie 7 (Klatka Jordana) *Klatka Jordana* wymiaru $n \times n$ to macierz postaci

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Pokaż, że ma ona dokładnie jedną wartość własną λ o krotności algebraicznej n oraz krotności geometrycznej 1.
Wskazówka: Rozważ jądro przekształcenia $M - \lambda\,\mathrm{Id}$.

Zadanie 8 Udowodnij, że jeśli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ są różnymi wartościami własnymi, to odpowiadające im wektory własne $v_1, v_2, \ldots, v_k$ są liniowo niezależne.
Wskazówka: pokaż przez indukcję po ℓ, że v_ℓ jest liniowo niezależny od $\{v_1, \ldots, v_{\ell-1}\}$.

Zadanie 9 Pokaż, że jeśli λ jest wartością własną macierzy A to λ^k jest wartością własną A^k.

Zadanie 10 Znajdź wartości własne i odpowiadające wektory własne macierzy (nad $\mathbb{R}$):

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Znajdź wartości własne i odpowiadające wektory własne (nad $\mathbb{C}$):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$