Algebra - Lista 8

Zadanie 1 Udowodnij, że dla macierzy kwadratowych A, B wielomiany charakterystyczne macierzy AB oraz BA są takie same.

Zadanie 2 Sprawdź, które z podanych macierzy można sprowadzić do postaci diagonalnej.

$$\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3 Znajdź wartości własne i odpowiadające im wektory własne dla podanych przekształceń liniowych:

- $L((x, y, z)) = (2x - y, 0, y + z)$
- $L((x, y, z)) = (0, 0, y)$

Zadanie 4 Niech $A : V \mapsto V$ będzie przekształceniem liniowym. Pokaż, że $\ker A$ oraz $\operatorname{Im} A$ są przestrzeniami niezmienniczymi A.

Zadanie 5 Pokaż, że jeśli λ^2 jest wartością własną macierzy M^2, to M wa wartość własną λ lub $-\lambda$.
Wskazówka: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Zadanie 6 Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$, tj. dla wektorów $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$, $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$

$$\langle v, u \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \quad .$$

Pokaż, że

$$\big[\langle u, v \rangle\big] = u^T v \quad .$$

(zwróć uwagę, że $\langle u, v \rangle$ jest liczbą, a $u^T v$ macierzą).

Wywnioskuj z tego, że dla dowolnej macierzy M zachodzi

$$\langle u, Mv \rangle = \langle M^T u, v \rangle$$

Zadanie 7 Niech M będzie macierzą symetryczną (tj. $M = M^T$) wymiaru $n \times n$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$. Pokaż, że

$$\langle u, Mv \rangle = \langle Mu, v \rangle$$

(możesz skorzystać z poprzedniego zadanie).

Wywnioskuj z tego, że jeśli $\lambda \neq \lambda'$ są różnymi wartościami własnymi macierzy symetrycznej M o wektorach własnych v oraz v', to $\langle v, v' \rangle = 0$, tj. v i v' są prostopadłe.

Zadanie 8 Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$ zaś $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bazę ortnormalną. Niech $M = \big[v_1 | v_2 | \cdots | v_n\big]$ (tj. jej i-ta kolumna to i-ty wektor bazowy; zauważ, że jest to macierz przejścia z bazy $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ do bazy standardowej). Udowodnij, że

$$M^{-1} = M^T \quad .$$

(W szczególności, macierz przejścia z bazy standardowej do bazy $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ to $\big[v_1 | v_2 | \cdots | v_n\big]^T$.)

Zadanie 9 Uzupełnij do bazy ortonormalnej podane układy wektorów:

- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$;
- $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

Zadanie 10 Dokonaj ortonormalizacji baz:

- $(1, 2, 2), (1, 1, -5), (3, 2, 8)$;
- $(1, 1, 1), (-1, 1, -1), (2, 0, 1)$.