Algebra - Lista 9

Zadanie 1 (Nierówność Bessela; równość Parsevala) Niech $\{e_1, \dots, e_k\}$ będą układem ortonormalnym, tj.:

- $\forall i \langle e_i, e_i\rangle = 1$;
- $\forall i \neq j \langle e_i, e_j\rangle = 0$.

(Nie zakładamy, że jest bazą).

Pokaż, że dla dowolnego wektora v:

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle e_i, v\rangle|^2 \leq ||v||^2$$

i równość zachodzi tylko wtedy, gdy $\{e_1, \dots, e_k\}$ jest bazą.

Zadanie 2 (Macierz Grama) Zdefiniujmy macierz Grama układu wektorów $\{v_1, \dots, v_k\}$ w przestrzeni V z iloczynem skalarnym jako

$$G(A) = (\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j=1,\dots,k} \quad .$$

Udowodnij, że

- $\det(G(A))$ jest nieujemny
- $\det(G(A)) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest liniowo zależny.

Wskazówka: Co dzieje się z macierzą Grama, gdy ortonormalizujemy ten układ wektorów?

Zadanie 3 (Przypomnijmy, że $u \perp w$ jest zwyczajowym skrótem na oznaczenie, że $\langle u, v\rangle = 0$.)
Niech W będzie podprzestrzenią V, a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iloczynem skalarnym na V. Pokaż, że *dopełnienie ortogonalne* W:

$$W^{\perp} = \{v \in V \ : \ \forall_{w \in W}\ v \perp w\}$$

jest przestrzenią liniową. Pokaż też, że $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.

Zadanie 4 Niech $\{e_1, \dots, e_k\}$ będzie bazą ortonormalną podprzestrzeni $W \leq V$. Pokaż, że przekształcenie

$$Pv = \sum_i \langle e_i, v\rangle e_i$$

istotnie jest rzutem, tj. $P^2 = P$. Pokaż też, że $v - Pv \in W^{\perp}$ dla każdego wektora v.

Zadanie 5 Niech F będzie izometrią. Pokaż, że $\det F \in \{-1, 1\}$. Udowodnij, że złożenie izometrii jest jest izometrią.

Zadanie 6 Pokaż, że następujące przekształcenia są izometriami.

- obrót o kąt α na płaszczyźnie
- zamiana jednej ze współrzędnych (w bazie ortonormalnej) na przeciwną.

Zadanie 7 Zdefiniujmy iloczyn skalarny na przestrzeni wielomianów jako

$$\langle g, h\rangle = \int_0^1 g(x)h(x)\mathrm{d}x.$$

Dokonaj ortonormalizacji (dowolnej) bazy przestrzeni wielomianów stopnia nie większego niż 2.

Zrzutuj prostopadle na tą przestrzeń wielomiany x^4, $x^4 + x^3$, $x^4 + x^3 + x^2$, $x^4 + x^3 + x^2 + x$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
Wskazówka: Rzut jest przekształceniem liniowym.

Zadanie 8 Sprawdź, czy podane poniżej macierze są dodatnio określone

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 3 \\ 7 & 15 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad .$$

Zadanie 9 Przedstaw poniższe macierze dodatnio określone w postaci $A^T A$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad .$$

Wskazówka: Dla przypomnienia: jako macierz A możesz wziąć macierz $M_{\mathcal{E}\to\mathcal{A}}$, gdzie $\mathcal{E}$ to baza standardowa, zaś $\mathcal{A}$: baza ortonormalna.

Zadanie 10 Pokaż, że:

- suma dwóch macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określona;
- macierz odwrotna do macierzy dodatnio określonej jest dodatnio określona.