

Algebra 2015/16 — Egzamin

Czas: 180 minut.

W przypadku zadań rachunkowych rozwiązanie powinno zawierać opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń. W przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń.

Proszę podpisać wszystkie kartki. (Ta kartka jest przeznaczona na brudnopis).

Zadanie 1 Dana jest grupa G , rozważmy przekształcenie f między podzbiórmi G :

$$f(U) = \{g^{-1} : g \in U\}.$$

Niech $H \leq G$ będzie podgrupą G . Pokaż, że f jest bijekcją pomiędzy zbiorem warstw lewostronnych H i zbiorem warstw prawostronnych H .

Zadanie 2 Niech M będzie macierzą kwadratową liczb z ciała $\mathbb{F}$, zaś $\lambda \in \mathbb{F}$. Pokaż, że krotność algebraiczna λ jako wartości własnej M oraz M^T jest taka sama. Pokaż też, że krotność geometryczna λ jako wartości własnej M oraz M^T jest taka sama.

Zadanie 3 Rozważmy dwunastokąt i jego grupę obrotów.

Malujemy każdy wierzchołek na jeden z 5 kolorów. Dwa takie malowania są nierozróżnialne, jeśli można je przeprowadzić na siebie przy użyciu obrotu tego dwunastokąta. Ile jest nierozróżnialnych pokolorowań tego dwunastokąta?

Zadanie 4 Dla przestrzeni liniowych

$$S = \text{LIN}(\{(0, 3, 1, -3), (-2, 2, 1, -4)\})$$

$$T = \text{LIN}(\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 2, -1)\})$$

oblicz $\dim(S + T)$ oraz $\dim(S \cap T)$. Podaj dowolną bazę $S + T$.

Zadanie 5 Rozważmy poniższy układ równań nad ciałem $\mathbb{Z}_7$. Ile ma on rozwiązań, w zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_7$?

$$\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -\lambda \\ 3x_1 - \lambda x_2 + 2x_3 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 2\lambda \end{cases}.$$

Wskazówka: Zauważ, że możliwych wartości (x_1, x_2, x_3) jest 343.

Zadanie 6 Rozważmy wielomiany z pierścienia $\mathbb{R}[x]$:

$$f = x^6 + x^5 - 8x^4 - 2x^3 + 13x^2 + x - 6$$

$$g = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x.$$

Wydziel f przez g . Oblicz też ich największy wspólny dzielnik i przedstaw w postaci $af + bg$ dla odpowiednich $a, b \in \mathbb{R}[x]$.

Zadanie 7 Wykonaj poniższe obliczenia modulo 3 oraz 5. Oznaczenie 62^{-1} oznacza element odwrotny do 62 mod 3 w $\mathbb{Z}_3$ (analogicznie w $\mathbb{Z}_5$).

$$(1) -(125 \cdot 18 + 32 \cdot 49)^{-1} \cdot (75 \cdot 27 - 16 \cdot 7) + (77 \cdot 22^{-1} - 18 \cdot 255)$$

$$(2) 15^7 - 343^{12} \cdot 241^4 + 175 \cdot 123 - (176^{-1})^4 \cdot 121^2$$

Zadanie 8 Dla podanej permutacji σ podaj jej rozkład na cykle. Czy σ jest permutacją parzystą? Jaki jest rząd σ ? Oblicz permutację odwrotną σ^{-1} do σ . Podaj jej rozkład na cykle. Czy σ^{-1} jest permutacją parzystą? Jaki jest rząd σ^{-1} ?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 11 & 9 & 12 & 5 & 15 & 1 & 10 & 3 & 2 & 7 & 13 & 4 & 14 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 9 Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na tej przestrzeni. Niech $B = b_1, \dots, b_n$ będzie bazą ortonormalną V a $F : V \rightarrow V$ rzutem prostopadłym na podprzestrzeń jednowymiarową $W \leq V$.

Pokaż, że suma kwadratów długości rzutów prostopadłych wektorów z B na W wynosi 1, tj.:

$$\sum_{i=1}^n \|Fb_i\|^2 = 1.$$