

Algebra 2015/16 — Egzamin poprawkowy

Czas: 180 minut.

W przypadku zadań rachunkowych rozwiązanie powinno zawierać opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń. W przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń.

Zadanie 1 Niech V będzie przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym nad ciałem $\mathbb{R}$, zaś $V_1, V_2 \leq V$ jej podprzestrzeniami (z tym samym iloczynem skalarnym). Pokaż, że

$$V_1 \leq V_2 \iff V_1^\perp \geq V_2^\perp,$$

gdzie $U^\perp$ oznacza dopełnienie ortogonalne U w przestrzeni V .

Zadanie 2 Dla podanej permutacji σ podaj jej rozkład na cykle. Czy σ jest permutacją parzystą? Jaki jest rząd σ ? Oblicz permutację odwrotną σ^{-1} do σ . Podaj jej rozkład na cykle. Czy σ^{-1} jest permutacją parzystą? Jaki jest rząd σ^{-1} ?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 5 & 1 & 12 & 14 & 7 & 10 & 13 & 16 & 8 & 6 & 4 & 15 & 2 & 3 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3 Rozważmy poniższy układ równań nad ciałem $\mathbb{Z}_{11}$. Ile ma on rozwiązań, w zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_{11}$?

$$\begin{cases} \lambda^2 x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 + \lambda \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 6 \\ 9x_1 + 5x_2 + \lambda x_3 = 7 \end{cases}.$$

Wskazówka: Zauważ, że możliwych wartości (x_1, x_2, x_3) jest 1331.

Zadanie 4 Dla przestrzeni liniowych

$$S = \text{LIN}(\{(-3, 3, 7, -4), (3, 0, -1, 1)\})$$

$$T = \text{LIN}(\{(5, -3, -7, 5), (-4, -1, 0, 0)\})$$

oblicz $\dim(S + T)$ oraz $\dim(S \cap T)$. Podaj dowolną bazę $S + T$.

Zadanie 5 Niech G będzie grupą przemenną (innymi słowy: abelową) a $H_1, H_2 \leq G$ będą jej dwoma podgrupami G , gdzie $H_1 \cap H_2 = \{e\}$. Pokaż, że podgrupa $\langle H_1 \cup H_2 \rangle$ generowana przez sumę H_1 i H_2 jest izomorficzna z iloczynem kartezjańskim $H_1 \times H_2$.

Zadanie 6 Znajdź wartości własne i odpowiadające wektory własne macierzy

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 7 Podaj macierz odwrotną do macierzy:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 8 Wykonaj poniższe obliczenia modulo 3 oraz 5. Oznaczenie 62^{-1} oznacza element odwrotny do 62 mod 3 w $\mathbb{Z}_3$ (analogicznie w $\mathbb{Z}_5$).

- $(25 \cdot 39 + 12 \cdot 7 - 10 \cdot 4)^{-124} \cdot (-173)^{-121} - (34 \cdot 49^{-33} - 26 \cdot 341^{482})$
- $22^{170} \cdot 23^{122} - (-13^{-53} + 24 \cdot 125)^{-142} + (-17)^{134} \cdot (23 \cdot 392^{-237} - 6 \cdot 340^{421})$

Zadanie 9 Niech f, g, f', g', a będą niezerowymi wielomianami z pierścienia wielomianów $\mathbb{F}[x]$. Załóżmy, że $f = af'$ oraz $g = ag'$.

- Jeśli $h' = \gcd(f', g')$, to ile wynosi $\gcd(f, g)$?
- Jeśli h', r' są ilorazem oraz resztą z dzielenia f' przez g' , to ile wynosi iloraz, a ile reszta z dzielenia f przez g ?