

Algebra 2015/16 - Kolokwium 1

Czas: 120 minut.

W przypadku zadań rachunkowych rozwiązanie powinno zawierać opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń. W przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń.

Proszę podpisać wszystkie kartki. (Ta kartka jest przeznaczona na brudnopis).

Zadanie 1 Niech V będzie przestrzenią liniową (nad ciałem $\mathbb{R}$) wielomianów o współczynnikach w $\mathbb{R}$ i stopnia nie większego niż 4. Wyznacz wymiary $\text{LIN}(S) \cap \text{LIN}(T)$ oraz $\text{LIN}(S) + \text{LIN}(T)$ dla

$$S = \{3x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 1, 2x^2 - x - 2\} ,$$

$$T = \{-2x^4 - 3x^3 - 4x, x^3 - 4x^2 + x + 4\} .$$

Podaj (dowolną) bazę $\text{LIN}(S) + \text{LIN}(T)$; uzasadnij, dlaczego jest to baza.

Zadanie 2 Znajdź wartości własne i odpowiadające wektory własne macierzy:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 3 Podaj macierz odwrotną do macierzy:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 4 Rozważmy układ równań w liczbach rzeczywistych

$$\begin{cases} (1 + \lambda)x_1 & + (1 - \lambda)x_2 & + x_3 & = & 1 \\ x_1 & + (1 + \lambda)x_2 & + (1 - \lambda)x_3 & = & 1 \\ x_1 & + x_2 & + (1 + \lambda)x_3 & = & 1 - \lambda \end{cases} .$$

Ile rozwiązań ma ten układ, w zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{R}$?

Zadanie 5 Niech M będzie górnotrójkątną macierzą odwracalną. Pokaż, że M^{-1} też jest górnotrójkątna.

Dla przypomnienia: macierz $(a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,n}$ jest górnotrójkątna, jeśli $a_{i,j} = 0$ dla $i > j$.

Zadanie 6 Niech V będzie n -wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$; niech $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie iloczynem skalarnym w tej przestrzeni. Dla układu n wektorów $v_1, \dots, v_n \in V$ pokaż równoważność następujących warunków:

- $\{v_1, \dots, v_n\}$ jest bazą ortogonalną;
- dla każdego $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ oraz każdego $v \in V$ zachodzi

$$\langle v, v_j \rangle = 0 \implies v \in \text{LIN}(v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n).$$

Zadanie 7 Niech $M_1, \dots, M_k$ będą macierzami wymiarów $n_1 \times n_1, \dots, n_k \times n_k$ o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$. Niech M będzie macierzą rozmiaru $(n_1 + \dots + n_k) \times (n_1 + \dots + n_k)$ z macierzami $M_1, \dots, M_k$ na przekątnej i samymi zerami w innych miejscach:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_k \end{bmatrix} .$$

Niech V_λ będzie podprzestrzenią wektorów własnych macierzy M dla wartości własnej λ . Pokaż, że V_λ ma bazę B , taką że dla każdego $v \in B$ istnieje $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ oraz liczby $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_j} \in \mathbb{F}$, takie że

$$v = \underbrace{[0, 0, \dots, 0]}_{n_1 + \dots + n_{j-1}}, \underbrace{[\alpha_1, \dots, \alpha_{n_j}]}_{n_j \text{ pozycji}}, \underbrace{[0, 0, \dots, 0]}_{n_{j+1} + \dots + n_k}]^T,$$

tj. v ma same zera poza pozycjami odpowiadającymi mnożeniu przez macierz M_j .