

Algebra 2015/16 — Kolokwium 2

Czas: 120 minut.

W przypadku zadań rachunkowych rozwiązanie powinno zawierać opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń. W przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń.

Proszę podpisać wszystkie kartki. (Ta kartka jest przeznaczona na brudnopis).

Zadanie 1 Rozpatrzmy standardowy iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Dokonaj ortonormalizacji podanego układu wektorów i uzupełnij uzyskany układ ortonormalny do bazy ortonormalnej.

$$(2, 0, 2, -1)^T; (1, 0, 10, 4)^T; (4, 1, -2, -5)^T.$$

Wskazówka: Dla dobra nas wszystkich: nie zmieniaj kolejności wektorów.

Zadanie 2 Niech M będzie odwracalną macierzą liczb rzeczywistych. Pokaż, że jeśli $M^{-1} = M^T$ to M jest macierzą ortogonalną.

Zadanie 3 Dla podanej poniżej permutacji σ podaj jej rozkład na cykle. Oblicz σ^{-1} . Czy σ jest permutacją parzystą? Jaki jest rząd σ ?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 5 & 4 & 12 & 3 & 13 & 1 & 10 & 14 & 9 & 6 & 2 & 11 & 8 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 4 Dla podanych podzbiorów grupy permutacji S_5 określ, czy są one podgrupami S_5 (permutacje podane są jako rozkłady na cykle; e oznacza permutację identycznościową). Jeśli podany zbiór jest podgrupą, wystarczy odpowiedź „TAK”. Jeśli nie jest, to odpowiedź „NIE” uzasadnij.

- (1) $G_1 = \{e; (1, 2, 3, 4); (1, 4, 3, 2); (1, 3); (1, 3)(2, 4)\};$
- (2) $G_2 = \{e; (1, 3, 5); (1, 5, 3)\};$
- (3) $G_3 = \{e; (1, 2)(3, 5); (1, 3)(2, 5); (1, 5)(2, 3)\};$
- (4) $G_4 = \{e; (2, 4)\};$
- (5) $G_5 = \{e; (1, 3); (2, 4); (1, 4)(2, 3); (1, 2)(3, 4); (1, 3)(2, 4)\};$
- (6) $G_6 = \{e; (2, 4); (1, 3, 5); (1, 5, 3); (1, 3, 5)(2, 4); (1, 5, 3)(2, 4)\};$
- (7) $G_7 = \{e; (1, 2, 5, 4); (1, 4, 5, 2); (1, 5)(2, 4)\};$
- (8) $G_8 = \{e; (1, 3); (1, 4)(2, 3); (1, 2)(3, 4); (1, 2, 3, 4); (1, 3)(2, 4); (1, 4, 3, 2)\}.$

Podzbiór	Grupa? (T/N)	Argument, jeśli N
G_1		
G_2		
G_3		
G_4		
G_5		
G_6		
G_7		
G_8		

Zadanie 5 Rozpatrzmy graniastosłup, którego podstawa to niebędący kwadratem romb, zaś ściany boczne to kwadraty. Jaki jest rząd grupy obrotów tej bryły? A jaki jest rząd grupy obrotów i symetrii (odbić)¹?

Rozważmy działanie grupy obrotów i symetrii (odbić) na zbiorze wierzchołków tego graniastosłupa. Podaj orbity tego działania. Dla każdej orbity wybierz po jednym wierzchołku i podaj jego stabilizator.

Zadanie 6 Niech G będzie grupą. Pokaż, że przekształcenie $\varphi : G \times G \rightarrow G$, zdefiniowane jako

$$\varphi((g, g')) = g \cdot g'$$

jest homomorfizmem grup wtedy i tylko wtedy, gdy G jest przemienna.

Zadanie 7 Niech $\sigma, \tau \in S_n$ będą dwoma permutacjami. Pokaż, że dla każdego k permutacje σ oraz $\tau^{-1}\sigma\tau$ mają tyle samo cykli długości k w swoich rozkładach na cykle.

¹Formalnie, grupa obrotów i symetrii to grupa wszystkich izometrii zachowujących ten graniastosłup