

Algebra — Lista 1

Zadanie 1 Pokaż, że zbiór $\mathbb{Z}_p$ dla p będącego liczbą złożoną nie jest ciałem, działania określamy jako $a+_pb = (a+b) \bmod p$ oraz $a \cdot_p b = (ab) \bmod p$. W tym celu rozważ, czy każdy element ma element odwrotny.

Zadanie 2 Pokaż, że zbiór liczb $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ jest ciałem (ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem).

Zadanie 3 Pokaż, że zbiór $\mathbb{R}$ ze zwykłym dodawaniem oraz mnożeniem $a \cdot b := ab\sqrt{2}$ jest ciałem. Jak wygląda „jedynka” w tym ciele?

Zadanie 4 Pokaż wprost z definicji, że jeśli U jest zbiorem liniowo zależnym, to istnieje w nim wektor $u \in U$, taki że

$$\text{LIN}(U) = \text{LIN}(U \setminus \{u\}).$$

Zadanie 5 Niech M będzie zbiorem skończonym. Na zbiorze jego podzbiorów 2^M określamy operacje:

$$U + V := V \Delta U, \quad 1 \cdot U = U, \quad 0 \cdot U = \emptyset,$$

gdzie Δ oznacza różnicę symetryczną, tj. $U \Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$. Pokaż, że tak określony zbiór jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Z}_2$.

Zadanie 6 Niech V , przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{F}$, $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ zbiór wektorów, zaś $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ ciąg skalarów, takich że $\alpha_1 \neq 0$. Pokaż, że

$$\text{LIN}\left(\left\{\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i, v_2, \dots, v_k\right\}\right) = \text{LIN}(\{v_1, v_2, \dots, v_k\}).$$

Zadanie 7 Przedstaw wektor w jako kombinację podanych wektorów $v_1, v_2, \dots, v_k$ (lub uzasadnij, że to niemożliwe), nad ciałem $\mathbb{R}$:

- (1) $w = (1, 5), v_1 = (1, 1), v_2 = (2, 0)$.
- (2) $w = (5, 10, 11), v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, 3, 2), v_3 = (1, 1, 1)$.
- (3) $w = (5, 10, 11), v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, 3, 2), v_3 = (1, 8, 7)$.
- (4) $w = (4, 17, 18), v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, 3, 2), v_3 = (3, 9, 11)$.

W punktach 3, 4 proponuję skorzystać z Zadania 4 oraz 6, nawet jeśli nie umiesz ich pokazać.

Zadanie 8 Niech S, T będą podprzestrzeniami przestrzeni V . Pokaż, że $S \cap T$ oraz $S + T$ zdefiniowane jako

$$S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}$$

są odpowiednio: największą przestrzenią zawartą w S, T oraz najmniejszą zawierającą S i T .

Pokaż, że $S \times T$ jest przestrzenią liniową.

Zadanie 9 Rozważmy przestrzeń $\mathbb{Z}_3^3$ (zbiór trzelementowych ciągów elementów z $\mathbb{Z}_3$, nad ciałem $\mathbb{Z}_3$). Ile wektorów należy do $\text{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 1))$? A ile do $\text{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 2))$?

Zadanie 10 Sprawdź, czy następujące podzbiory $\mathbb{R}^n$ są podprzestrzeniami liniowymi:

- (1) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 0\}$
- (2) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - c = 0\}$
- (3) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 2a - c = 0\}$
- (4) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 0\}$
- (5) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| = 1\}$
- (6) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = a\}$