Algebra - Lista 12

Na wykładzie nie zdążyłem podać, ale czasami muszą z tego Państwo skorzystać:

Lemat 1. *Niech G działa na zbiorze $\mathcal{C}$ i $c \in \mathcal{C}$. Wtedy $|O_c| \cdot |G_c| = |G|$.*

Wniosek 2. Niech G działa na zbiorze $\mathcal{C}$ i $c \in \mathcal{C}$. Wtedy wielkość orbity O_c dzieli rząd grupy $|G|$.

Zadanie 1 Niech grupa G działa na zbiorze $\mathcal{C}$ i $c \in \mathcal{C}$. Pokaż, że stabilizator G_c tego elementu jest podgrupą G.

Zadanie 2 Znajdź grupę obrotów sześcianu.
Wskazówka: Oblicz rząd grupy używając Lematu 1, każdy obrót ma naturalną interpretację.

Zadanie 3 Rozpatrzmy romb, który nie jest kwadratem. Podaj grupę symetrii tej figury. Dla każdego wierzchołka podaj orbitę oraz stabilizator.

Zadanie 4 W grupie S_{10} rozpatrzmy grupy generowane przez

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 8 & 3 & 2 & 9 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

(3) $(1, 6, 9)(2, 10)(3, 4, 5, 7, 8)$.

Dla każdego elementu ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 10\}$ wyznacz jego orbitę oraz stabilizator dla naturalnego działania działania tych podgrup na zbiorze $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

Zadanie 5 Wyznacz rzędy grup obrotów brył platońskich: czworościanu foremnego, ośmiościanu, dwunastościanu foremnego, dwudziestościanu foremnego.
Wskazówka:Lemat 1.

Zadanie 6 [Grupa dihedralna] Rozpatrzmy grupę obrotów i odbić n-kąta foremnego (nazywamy ją *grupą dihedralną* D_n). Ile ma ona elementów? Pokaż, że nie ma innych przekształceń zachowujących ten wielokąt (tj. przekształceń z wierzchołków w wierzchołki, które zachowują sąsiedztwo wierzchołków).
Wskazówka: Lemat 1

Zadanie 7 Niech grupa G działa na zbiorze X i $|G| = 3^k$, a $|X|$ nie jest podzielne przez 3. Pokaż, że w X istnieje taki element, który jest punktem stałym wszystkich przekształceń z G, (tzn. jego stabilizator to G).
Wskazówka: Lemat 1

Zadanie 8 Pokaż, że centrum S_n (tj. zbiór $\{a \,:\, ag = ga$ dla każdego $g \in S_n\}$) dla $n \geq 3$ jest trywialne, tzn. jest równe $\{e\}$.
Wskazówka: Wystarczy popatrzeć na g będące odpowiednią transpozycją.

Zadanie 9 Pokaż, że jeśli H jest grupą, to zbiór elementów

$$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \,:\, h \in H\}$$

też jest podgrupą (podgrupa sprzężona do H). Pokaż też, że $|H| = |gHg^{-1}|$.

Zadanie 10 Załóżmy, że w G jest dokładnie jeden element x (różny od e) rzędu 2, tj. $x^2 = e$. Udowodnij, że jest on w centrum grupy, tj. $gx = xg$ dla każdego g.
Wskazówka: Ile jest podgrup dwuelementowych w G? Popatrz też na zadanie 9.