

Algebra - Lista 16

Zadanie 1 Udowodnij, że każdy wielomian f nad pewnym ciałem K da się przedstawić jednoznacznie (z dokładnością do kolejności czynników) w postaci $f = c \cdot f_1 \cdot f_2 \cdots f_k$, gdzie c jest stałą, a każde f_i unormowanym (o współczynniku wiodącym równym 1) wielomianem nierozkładalnym.

Wskazówka: Twierdzenia dowodzi się podobnie jak analogicznego twierdzenia o liczbach całkowitych.

Zadanie 2 Udowodnij uogólnienia twierdzenia z wykładu:

Niech f będzie wielomianem nierozkładalnym a $p_1 p_2 \dots p_\ell$ wielomianami w $\mathbb{F}[x]$ oraz $f^k | p_1 p_2 \dots p_\ell$. Wtedy istnieją liczby $n_1, n_2, \dots, n_\ell$, takie że $\sum_i n_i \geq k$ oraz dla każdego i zachodzi $f^{n_i} | p_i$.

Zadanie 3 Niech *krotność* pierwiastka c w f to największa liczba naturalna k , taka że $(x - c)^k | f$.

Udowodnij uogólnienia twierdzenia z wykładu:

Niech liczby $c_1, c_2, \dots, c_\ell$ z ciała F będą pierwiastkami stopnia k_i wielomianu $f \in \mathbb{F}[x]$. Wtedy $\sum_i k_i \leq \deg(f)$.

Zadanie 4 Wylicz resztę z dzielenia następujących wielomianów przez $x - c$ dla podanych wartości c (jeśli nie jest powiedziane inaczej: wielomiany są z $\mathbb{R}[x]$).

- $x^3 - 5x^2 + 3x + 1, c \in \{0, 1, 2\}$;
- $2x^3 + 2x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x], c \in \{1, 2, 3\}$;
- $4x^2 + 3x - 2, c \in \{-1, 0, 1\}$;
- $x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x], c \in \{-1, 0, 1\}$;

Zadanie 5 Korzystając z tw. Bezout rozłóż poniższe wielomiany z $\mathbb{Z}_2[x]$ na czynniki nierozkładalne

$$x^5 + x^3 + x + 1, \quad x^4 + x^3 + x^2 + 1, \quad x^5 + x^2 + x, \quad x^4 + x^2 + 1, \quad x^4 + x^2 + x.$$

Potraktuj powyższe wielomiany jako wielomiany z $\mathbb{Z}_3[x]$ i również rozłóż je na czynniki nierozkładalne.

Zadanie 6 Wielomian f ma resztę z dzielenia przez $x - c_1$ równą r_1 oraz resztę z dzielenia przez $x - c_2$ równą r_2 . Ile wynosi reszta z dzielenia f przez $(x - c_1)(x - c_2)$?

Wystarczy, że zapiszesz zależność na r_1, r_2 , nie musisz jej rozwiązywać.

Wskazówka: Skorzystaj z tw. Bezout.

Zadanie 7 Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem skończonym o n elementach. Pokaż, że w $\mathbb{F}[x]$ prawdziwa jest zależność:

$$x^n - x = \prod_{a \in \mathbb{F}} (x - a)$$

Wskazówka: Porównaj pierwiastki obydwu wielomianów oraz ich wiodące współczynniki.