

Algebra - Lista 3

Zadanie 1 Wyznacz bazę obrazu dla następujących przekształceń liniowych (z $\mathbb{R}^3$)

- $F(x, y, z) = (2x + y, 3x - z, 5x + y - z, -2x + 2y - 2z)$;
- $G(x, y, z) = (x + y, y - 2z, 3z, x - y)$;
- $H(x, y, z) = (x + y, y + z)$;
- $I(x, y, z) = (x + y, 2y + z, y - z)$;
- $J(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y, 3x + 3y)$.

Zadanie 2 Rozważmy przestrzeń wielomianów o stopniu najwyżej 7 nad ciałem $\mathbb{Z}_5$ oraz przekształcenie liniowe zdefiniowane jako suma pierwszej i drugiej pochodnej, tj.: $F(x^i) = ix^{i-1} + i(i-1)x^{i-2}$, gdzie $i(i-1)x^{i-2}$ dla $i < 2$ oznacza 0.

Podaj bazy jądra $\ker F$ i obrazu $\operatorname{Im} F$ tego przekształcenia. Podaj ich wymiary.

Zadanie 3 Dane jest przekształcenie liniowe $F : V \mapsto W$. Udowodnij, następujące warunki są równoważne:

- F jest różnowartościowe;
- $\dim(\ker(F)) = 0$;
- $\ker(F)$ składa się z jednego wektora;
- $\operatorname{rk}(F) = \dim(V)$.

Zadanie 4 Załóżmy, że dla przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ zachodzi $L^3(v) = \vec{0}$, dla każdego wektora $v \in \mathbb{R}^2$. Pokaż, że wtedy również $L^2(v) = \vec{0}$, dla każdego wektora v .

Udowodnij uogólnienie tego twierdzenia: jeśli dla $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ oraz pewnego $k > n$ zachodzi $L^k(v) = \vec{0}$ dla dowolnego v , to zachodzi również $L^n(v) = \vec{0}$.

Wskazówka: rozważ wektory $v, L(v), L^2(v), \dots, L^n(v)$. Są one liniowo zależne.

Zadanie 5 Pokaż, że dla macierzy A, B, C odpowiednich wymiarów oraz skalaru α zachodzą następujące zależności (Id oznacza macierze identycznościową/jednostkową odpowiedniego wymiaru, tj. mającą na przekątnej jedynek oraz zera w innych miejscach):

$$\begin{aligned}\operatorname{Id} \cdot A &= A \cdot \operatorname{Id} = A \\ A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ (A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \\ \alpha(A \cdot B) &= (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B) \\ A[B|C] &= [AC|BC] \\ \left[\frac{B}{C} \right] A &= \left[\frac{BA}{CA} \right]\end{aligned}$$

Wynioskuj z tego, że zbiór macierzy $n \times m$ nad K jest przestrzenią liniową nad K .

Zadanie 6 Definiujemy *transpozycję* macierzy jako „obrócenie” jej wokół przekątnej lewy-górny róg-prawy-dolny róg.

Formalnie:

$$(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}^T = (a_{ji})_{\substack{j=1,\dots,m \\ i=1,\dots,n}}.$$

Pokaż, że

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

Zadanie 7 Zdefiniujmy $f_0 = 0, f_1 = 1$ oraz $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Rozważmy macierz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Pokaż, że dla $k \geq 1$ zachodzi

$$M^k = \begin{bmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{bmatrix} \text{ oraz } M^k \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Rozważając równość $M^{n+k} = M^k \cdot M^n$ wyprowadź zależność:

$$f_{n+k} = f_{k-1}f_n + f_kf_{n+1} = f_kf_{n-1} + f_{k+1}f_n.$$

Zadanie 8 Podaj zwartą postać macierzy (nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^n.$$

Zadanie 9 Oblicz (macierze są nad $\mathbb{R}$) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2$; $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^3$; $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 10 Ustalmy macierz A wymiaru $n \times n$. Pokaż, że zbiór macierzy B , takich że $AB = BA$, jest przestrzenią liniową.

Znajdź wszystkie macierze B wymiaru 2×2 spełniające warunek $B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot B$.