

Algebra — Lista 4

Zadanie 1 Pokaż, że dla macierzy odpowiednich rozmiarów mamy

$$\operatorname{rk}(AB) \leq \min(\operatorname{rk}(A), \operatorname{rk}(B)).$$

Wskazówka: może być pomocna analogiczna zależność dla obrazów przekształceń liniowych.

Zadanie 2 Znajdź wszystkie macierze A wymiaru 2×2 spełniające warunek $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Wskazówka: Pokaż najpierw, że $\operatorname{rk}(A) = 2$ implikuje $\operatorname{rk}(A^2) = 2$. Potem rozpatrz możliwe $\operatorname{rk}(A)$.

Zadanie 3 *Minor* A to dowolna macierz utworzona z A poprzez usunięcie pewnego zbioru kolumn i pewnego zbioru wierszy.

Pokaż, że dla (niekoniecznie kwadratowej) macierzy A zachodzi:

$$\operatorname{rk}(A) = \max\{\operatorname{rk}(A') : A' \text{ jest macierzą kwadratową i minorem } A\}.$$

Wskazówka: może być pomocne, że rząd kolumnowy i wierszowy są sobie równe.

Zadanie 4 Znajdź rząd podanej poniżej macierzy (o wartościach w $\mathbb{R}$) w zależności od parametru α

$$\begin{bmatrix} 5 & p & 5 & p \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & p & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5 Wyznacz bazy jądra przekształceń zadanych przez macierze (o wartościach w $\mathbb{R}$):

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 11 & 17 & -8 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 9 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Zadanie 6 Pokaż, że każdą macierz A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej ilości) macierzy ze zbioru

$$\{T_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n} \cup \{\operatorname{Id} + \alpha 1_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n, \alpha \in \mathbb{F}} \cup \{D(1, \dots, 1, \underbrace{\alpha}_{i\text{-te miejsce}}, 1, \dots, 1)\}_{i=1,\dots,n, \alpha \in \mathbb{F}}.$$

gdzie $D(1, \dots, 1, \underbrace{\alpha}_{i\text{-te miejsce}}, 1, \dots, 1)$ oznacza macierz przekątniową o wyrazach $1, \dots, 1, \underbrace{\alpha}_{i\text{-te miejsce}}, 1, \dots, 1$.

Pokaż, że jeśli $\operatorname{rk}(A) = n$, to możemy dodatkowo wymagać, by wszystkie macierze przekątniowe były pierwsze w mnożeniu; alternatywnie, by były one ostatnie w mnożeniu.

Wskazówka: Zastosuj metodę eliminacji Gaussa na kolumnach i wektorach, aby sprowadzić macierz do postaci przekątniowej. Zinterpretuj te operacje jako mnożenie macierzy.

Zadanie 7 W $\mathbb{R}^3$ rozpatrzmy bazę standardową E oraz bazę B : $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Sprawdź, że macierze

$$M_{BE} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, M_{EB} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

są macierzami przejścia między tymi bazami.

Rozpatrzmy przekształcenie F , (wyrażone w bazie standardowej) jako

$$M_{EE}(F) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Wyznacz macierz tego przekształcenia w bazie B .

Zadanie 8 Niech V będzie przestrzenią wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{R}$ i stopnia najwyżej 3. Rozważmy układy wektorów x^0, x^1, x^2, x^3 oraz $x^0, x^0 + x^1, x^0 + x^1 + x^2, x^0 + x^1 + x^2 + x^3$. Udowodnij, że są one bazami. Zapisz macierz przejścia między tymi bazami.

Rozważmy przekształcenie $F : V \rightarrow V$ zadane jako $F(f) = f' + 2f'' + f'''$, gdzie $'$ oznacza pochodną. Wyznacz macierz tego przekształcenia w dwóch podanych powyżej bazach.

Zadanie 9 (śląd macierzy) Śludem macierzy kwadratowej jest suma elementów na jej przekątnej, tj.

$$\operatorname{tr} \left((a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \right) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Pokaż, że:

- $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^T)$;
- $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Zadanie 10 Wyznacz macierze poniższych przekształceń w bazie standardowej odpowiedniego $\mathbb{R}^n$:

- $(x, y, z) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$;
- obrót przestrzeni $\mathbb{R}^2$ o kąt α (w lewo, tj. przeciwnie do ruchu wskazówek zegara);
- symetrii $\mathbb{R}^2$ względem prostej zadanej równaniem $y = 2x$.