

Algebra - Lista 7

Zadanie 1 Ile rozwiązań mają poniższe układy równań (w zależności od parametru p):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2p \\ p \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} p & p & p \\ 1 & p & p \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \end{bmatrix}$$

Zadanie 2 Podaj jedno rozwiązanie szczególne oraz postać rozwiązania ogólnego dla:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9 & 6 & 7 & 10 \\ -6 & 4 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & -11 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Preferowana metoda eliminacji.

Zadanie 3 Zbadaj ilość rozwiązań w zależności od parametru λ . Podaj jedno rozwiązanie układu (jeśli istnieje):

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4 Zbadaj ilość rozwiązań w zależności od parametru λ . Podaj jedno rozwiązanie układu (jeśli istnieje):

$$\begin{bmatrix} -6 & 8 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 7 & 3 \\ -3 & 5 & 4 & 2 \\ -3 & 7 & 17 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5 Zbadaj ilość rozwiązań podanych układów równań w zależności od parametru λ , pierwszy układ jest nad $\mathbb{Z}_5$.

$$\begin{cases} \lambda x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & +\lambda x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \\ 4 & 14 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6 Opisz przestrzeń rozwiązań poniższych układów równań (np. poprzez podanie bazy odpowiedniej przestrzeni liniowej)

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = & 0 \\ x_2 & -x_4 & = & 0 \\ -x_1 + x_3 & -x_5 & = & 0 \\ -x_2 + x_4 & -x_6 & = & 0 \\ -x_3 & +x_5 & = & 0 \\ -x_4 & +x_6 & = & 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 & +x_2 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-2} & +x_{n-1} & +x_n & = & 0 \\ x_{n-1} & +x_n & = & 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +5x_2 & +6x_3 & -4x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & +5x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +8x_2 & +24x_3 & -19x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Zadanie 7 Niech $A : V \mapsto V$ będzie przekształceniem liniowym. Pokaż, że $\ker A$ oraz $\operatorname{Im} A$ są przestrzeniami niezmienniczymi A .

Zadanie 8 Niech $F : V \rightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym, a M jego macierzą wyrażoną w bazie $B = b_1, \dots, b_n$, tj. $M = M_{BB}(F)$. Niech również $M' = A^{-1}MA$ (gdzie A — odwracalna). Pokaż, że $M' = M_{B'B'}(F)$ gdzie baza $B' = b'_1, \dots, b'_n$ jest zadana jako $[b'_i]_B = A_i^{-1}$.

Wskazówka: Zauważ, że $A_i^{-1} = A^{-1}e_i = A^{-1}[b_i]_B$.

Zadanie 9 Udowodnij, że jeśli $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ są różnymi wartościami własnymi, to odpowiadające im wektory własne $v_1, v_2, \dots, v_k$ są liniowo niezależne.

Wskazówka: pokaż przez indukcję po ℓ , że v_ℓ jest liniowo niezależny od $\{v_1, \dots, v_{\ell-1}\}$.

Zadanie 10 Pokaż, że jeśli λ jest wartością własną macierzy A to λ^k jest wartością własną A^k .