

Algebra 2016/17 — Kolokwium 1

Czas: 120 minut.

Każde zadanie należy oddać na osobnej, podpisanej kartce.

W przypadku zadań rachunkowych rozwiązanie powinno zawierać opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń. W przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń.

Zadanie 1 Niech $U, U' \subseteq V$ będą warstwami, odpowiednio, podprzestrzeni $W, W' \leq V$ (W, W' mogą być równe bądź różne). Pokaż, że $U \cap U'$ jest puste lub jest warstwą $W \cap W'$.

Zadanie 2 Wyznacz bazy: obrazu i jądra przekształcenia liniowego zadanego przez macierz (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3 Podaj macierz odwrotną do macierzy (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4 Rozważmy zbiór wszystkich (nieskończonych) ciągów o elementach w $\mathbb{R}$. Definiujemy dodawanie takich ciągów po współrzędnych, tak samo mnożenie przez skalar, tj.:

$$(a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots), \quad \alpha(a_1, a_2, \dots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots).$$

Jest to przestrzeń liniowa, gdzie $\vec{0}$ to ciąg złożony z samych 0. Dla podanych poniżej podzbiorów tej przestrzeni liniowej określ, które z nich są podprzestrzeniami liniowymi, a które nie. Odpowiedzi *uzasadnij*.

- (a) Zbiór ciągów $(a_1, a_2, \dots)$ takich, że dla każdego $n \geq 3$ mamy $a_n = n \cdot a_{n-1} + n^2 \cdot a_{n-2}$. Zauważ, że każdy z tych ciągów jest jednoznacznie określony przez swoje dwa pierwsze elementy a_1 oraz a_2 .
- (b) Zbiór ciągów $(b_1, b_2, \dots)$ takich, że dla każdego $n \geq 2$ mamy $b_n = 3 \cdot b_{n-1} + 2^n - 1$. Podobnie jak wyżej, każdy taki ciąg jest określony przez swój pierwszy element b_1 .
- (c) Zbiór ciągów $(c_1, c_2, \dots)$ takich, że dla każdego $n \geq 3$ mamy $c_n = c_{n-1} \cdot c_{n-2}$. Ponownie, każdy taki ciąg jest określony przez swoje dwa pierwsze elementy.
- (d) Zbiór ciągów $(d_1, d_2, \dots)$ takich, że skończenie wiele liczb spośród $d_1, d_2, \dots$ jest dodatnia.

Zadanie 5 Ile rozwiązań ma poniższy układ równań w zależności od parametru λ ? Układ jest nad $\mathbb{Z}_{13}$, tym samym $\lambda \in \mathbb{Z}_{13}$.

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda^2 y + \lambda^3 z = 1 \\ x + \lambda^2 y + \lambda^3 z = \lambda \\ x + y + \lambda^3 z = \lambda^2 \end{cases}.$$

Zadanie 6 Znajdź wartości własne i odpowiadające wektory własne przekształcenia $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$L(x, y, z) = (y + z, x + 2z, 0).$$

Zadanie 7 Niech M będzie macierzą kwadratową $n \times n$. Pokaż, że:

- $\ker(L_M) \subseteq \ker(L_{M^2})$, gdzie L_M to przekształcenie $v \mapsto Mv$, analogicznie L_{M^2} .
- $\text{rk}(M + M^2) \leq \text{rk}(M)$ (*wskazówka*: Patrz poprzedni punkt.)