

Algebra 2016/17 — Kolokwium 2

Czas: 120 minut.

Każde zadanie należy oddać na osobnej, podpisanej kartce.

W przypadku zadań rachunkowych rozwiązanie powinno zawierać opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń; *zadanie nie spełniające tego warunku mogą nie być sprawdzane*. W przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń.

Zadanie 1 Dla danej poniżej permutacji σ podaj jej rozkład na cykle. Oblicz σ^{-1} , podaj jej rozkład na cykle. Czy σ jest permutacją parzystą? Czy σ^{-1} jest permutacją parzystą? Jaki jest rząd σ , a jaki σ^{-1} ?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 5 & 15 & 10 & 9 & 7 & 12 & 1 & 13 & 14 & 4 & 3 & 2 & 8 & 11 & 6 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 2 Które z poniższych zbiorów z działaniem są grupami? Odpowiedz TAK/NIE, odpowiedź NIE należy krótko uzasadnić (w odpowiedziach używaj nazw $G_1, \dots, G_{10}$).

- G_1 : liczby całkowite z mnożeniem;
- G_2 : liczby całkowite z dodawaniem;
- G_3 : zbiór macierzy o elementach z $\mathbb{R}$, których wyznacznik to 1 lub -1 , z mnożeniem macierzy;
- G_4 : zbiór macierzy o elementach z $\mathbb{R}$, których wyznacznik to -1 , z mnożeniem macierzy;
- G_5 : liczby naturalne, z dodawaniem;
- $G_6 = \{e; (1, 2, 4); (1, 4, 2)\}$;
- $G_7 = \{e; (6, 7)(4, 5); (6, 4)(7, 5); (6, 5)(7, 4)\}$;
- $G_8 = \{e; (3, 5)\}$;
- $G_9 = \{e; (1, 5, 4, 2); (1, 4); (1, 2, 4, 5); (1, 4)(2, 5)\}$;
- $G_{10} = \{e; (1, 3); (1, 6)(2, 3); (1, 2)(3, 6); (1, 2, 3, 6); (1, 3)(2, 6); (1, 6, 3, 2); (1, 2, 6); (1, 6, 2)\}$.

Zadanie 3 Oblicz poniższe wyrażenia modulo 3 oraz modulo 5. Wyrażenie n^{-1} oznacza element odwrotny do n w odpowiednim $\mathbb{Z}_p$.

- $- \left(605 \cdot \left((-17)^{-1} \right)^{41} + 31 \cdot 13 \right)^{16} \cdot \left((22 \cdot 11 - 16 \cdot 151)^{-1} \right)^3 + (143^5 \cdot 13^{-1} - 122^{17} \cdot 11^{-1})^2$;
- $45^{16} - 343^{12} \cdot 241^4 + 130 \cdot 33 - (143^{-1})^4 \cdot 169^2 - (-32)^{44} \cdot (38 \cdot (392^{-1})^{237} - 6 \cdot (-110)^{21})$.

Zadanie 4 Niech $\varphi_a : G \rightarrow G$ będzie zdefiniowane jako $\varphi_a(g) = aga^{-1}$; dla $A \subseteq G$ funkcję $\varphi_a(A)$ definiujemy w naturalny sposób: $\varphi_a(A) = \{\varphi_a(g) : g \in A\}$. Pokaż, że jeśli $H \leq G$ jest podgrupą G to $\varphi_a(H)$ też jest podgrupą G , tj. $\varphi_a(H) \leq G$. Pokaż też, że H jest podgrupą normalną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in G$ mamy $\varphi_a(H) = H$.

Zadanie 5 Niech G działa na zbiorze $\mathcal{C}$. W naturalny sposób rozszerzamy to działanie na zbiór par $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$: $g(a, b) = (g(a), g(b))$. Pokaż, że:

- Dla pary $(c_1, c_2) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ jej stabilizator to przecięcie stabilizatorów c_1 i c_2 (w działaniu G na $\mathcal{C}$):

$$G_{(c_1, c_2)} = G_{c_1} \cap G_{c_2}.$$

- Orbita pary $(c_1, c_2) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ zawiera się w produkcie orbit c_1 oraz c_2 :

$$O_{(c_1, c_2)} \subseteq O_{c_1} \times O_{c_2}.$$

Zadanie 6 Niech G będzie grupą, a $g, h \in G$ jej elementami. Pokaż, że rzędy gh oraz hg są takie same.

Zadanie 7 Niech $M = (m_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ będzie macierzą dodatnio określoną. Udowodnij, że

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^n m_{ii}.$$

Wskazówka: Na ćwiczeniach pokazaliśmy nierówność Hadamarda: jeśli $A = [C_1 | C_2 | \dots | C_n]$, gdzie C_i są kolumnami A , to $\det(A) \leq \prod_{i=1}^n \sqrt{\langle C_i, C_i \rangle}$, gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ to standardowy iloczyn skalarny, tj.: $\langle C_i, C_i \rangle = C_i^T C_i$.