

Algebra — Lista 1

Zadanie 1 Pokaż, że $\mathbb{Z}_p$ jest ciałem dla liczby pierwszej p .

Jedyna nietrywialna część tego zadania to pokazanie, że każdy element ma element odwrotny. Możesz to zrobić według następującego schematu:

- dla ustalonego $a \neq 0$ rozważ $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$;
- pokaż, że elementy w tym ciągu są niezerowe i różne;
- wywnioskuj z tego, że a ma element odwrotny w $\mathbb{Z}_p$.

Zadanie 2 Pokaż, że zbiór $\mathbb{Z}_p$ dla p będącego liczbą złożoną nie jest ciałem, działania określamy jako $a+_pb = (a+b) \bmod p$ oraz $a \cdot_p b = (ab) \bmod p$. W tym celu rozważ, czy każdy element ma element odwrotny.

Zadanie 3 Pokaż, że zbiór liczb $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ jest ciałem (ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem).

Zadanie 4 Pokaż, że zbiór $\mathbb{R}$ ze zwykłym dodawaniem oraz mnożeniem $a \cdot b := ab\sqrt{2}$ jest ciałem. Jak wygląda „jedynka” a jak „zero” w tym ciele?

Zadanie 5 Niech M będzie zbiorem skończonym. Na zbiorze jego podzbiorów 2^M określamy operacje:

$$U + V := V \Delta U, \quad 1 \cdot U = U, \quad 0 \cdot U = \emptyset,$$

gdzie Δ oznacza różnicę symetryczną, tj. $U \Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$. Pokaż, że tak określony zbiór jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Z}_2$.

Zadanie 6 Niech V — przestrzeń liniowa nad $\mathbb{F}$ oraz $S, T \leq V$ będą podprzestrzeniami przestrzeni V . Zdefiniujmy $S \cap T, S + T \subseteq V$ z operacjami takimi, jak w V :

- $S \cap T$ jako zbiór to $S \cap T$ (przecięcie/iloczyn przestrzeni liniowych)
- $S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}$ (suma przestrzeni liniowych)

Pokaż, że $S \cap T$ oraz $S + T$ są odpowiednio: największą przestrzenią zawartą w S i T oraz najmniejszą zawierającą S i T .

Pokaż, też, że dla przestrzeni liniowych S, T nad tym samym ciałem $\mathbb{F}$, iloczyn kartezjański $S \times T$ z dodawaniem i mnożeniem po współrzędnych jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$.

Zadanie 7 Sprawdź, czy następujące podzbiory $\mathbb{R}^n$ są podprzestrzeniami liniowymi:

- (1) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 0\}$
- (2) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - c = 0\}$
- (3) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 2a - c = 0\}$
- (4) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 0\}$
- (5) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| = 1\}$
- (6) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = a\}$

Zadanie 8 Pokaż, że zbiór funkcji

$$\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \text{zbiór } \{r : f(r) \neq 0\} \text{ jest przeliczalny}\}$$

jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 9 Pokaż, że zbiór funkcji

$$\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |f(\mathbb{N})| \text{ jest skończony}\}$$

jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. ($f(A)$ rozumiemy jako $\{f(a) : a \in A\}$.)

Zadanie 10 Pokaż, że każda podprzestrzeń liniowa $\mathbb{R}^2$ jest jednej z postaci:

- jedynie wektor zerowy: $\{\vec{0}\}$
- wielokrotności ustalonego wektora z $\mathbb{R}^2$ (czyli wektory stanowiące prostą przechodzącą przez $(0, 0)$)
- całe $\mathbb{R}^2$.