

Algebra — Lista 11

Zadanie 1 Czy zbiór $\{\text{Id}, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$ z działaniem składania permutacji jest podgrupą grupy S_4 ? Czy jeśli dodamy do tego zbioru wszystkie cykle trzejelementowe to czy otrzymamy podgrupą S_4 ?

Zadanie 2 Niech S_n będzie grupą permutacji n elementów. Pokaż, że:

- $\langle (i, i+1); (1, 2, 3, \dots, n) \rangle = S_n$
- $\langle (1, 2); (2, 3, \dots, n) \rangle = S_n$

Zadanie 3 (Grupa alternująca) Udowodnij, że jeśli G jest podgrupą grupy permutacji S_n to

- zbiór G_p permutacji parzystych z G jest podgrupą G ;
- $|G_p| = |G|$ lub $|G_p| = \frac{|G|}{2}$.

W przypadku, gdy $G = S_n$ to ta podgrupa G_p to grupa alternująca A_n .

Zadanie 4 Dla macierzy $(a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,n}$ rozpatrzmy funkcję:

$$f((a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}.$$

Pokaż, że jest to wyznacznik.

Wskazówka: Możesz np. sprawdzić, że spełnia aksjomaty wyznacznika. Tylko zamiana kolumn jest nietrywialna: rozpatrz, jak zmienia się znak konkretnego iloczynu po zamianie kolumn.

Zadanie 5 Pokaż, że każda permutacja a A_n jest złożeniem cykli trzejelementowych.

Wskazówka: Pokaż najpierw, że iloczyn dwóch transpozycji da się przedstawić jako złożenie najwyżej dwóch takich cykli.

Zadanie 6 Dla podanych poniżej permutacji σ

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 1 & 2 & 9 & 8 & 3 & 5 & 10 & 6 \end{pmatrix}, \\ \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 12 & 5 & 7 & 14 & 6 & 2 & 1 & 10 & 4 & 9 & 13 & 3 & 11 & 8 \end{pmatrix}, \\ \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 3 & 10 & 1 & 13 & 14 & 9 & 6 & 4 & 12 & 5 & 2 & 11 & 8 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

podaj permutację odwrotną σ^{-1} ; rozłóż σ oraz σ^{-1} na cykle. Podaj rząd σ oraz σ^{-1} . Określ ich parzystość.

Zadanie 7 Niech grupa G działa na zbiorze $\mathcal{C}$ i $c \in \mathcal{C}$. Pokaż, że stabilizator G_c tego elementu jest podgrupą G .

Zadanie 8 Znajdź grupę obrotów sześcianu.

Wskazówka: Oblicz rząd grupy używając zależności $|O_c| \cdot |G_c| = |G|$; każdy obrót ma naturalną interpretację.

Zadanie 9 Wyznacz rzędy grup obrotów brył platońskich: czworościanu foremego, ośmiościanu foremego, dwunastościanu foremego, dwudziestościanu foremego.

Wskazówka: $|O_c| \cdot |G_c| = |G|$.

Zadanie 10 (Grupa dihedralna) Rozpatrzmy grupę obrotów i odbić n -kąta foremego (nazywamy ją *grupą dihedralną* D_n). Ile ma ona elementów? Pokaż, że nie ma innych przekształceń zachowujących ten wielokąt (tj. przekształceń z wierzchołków w wierzchołki, które zachowują sąsiedztwo wierzchołków).

Wskazówka: $|O_c| \cdot |G_c| = |G|$

Zadanie 11 (Dodatkowe, punkty nie liczą się do podstawy) Niech grupa G działa na zbiorze X i $|G| = 3^k$, a $|X|$ nie jest podzielne przez 3. Pokaż, że w X istnieje taki element, który jest punktem stałym wszystkich przekształceń z G , (tzn. jego stabilizator to G).