

Algebra — Lista 14

Na tej liście wielomiany, o ile nie jest napisane inaczej, pochodzą z pierścienia wielomianów $\mathbb{F}[x]$, gdzie $\mathbb{F}$ jest ciałem. W poszczególnych zadaniach ciało $\mathbb{F}$ może zostać ukonkretnione.

Zadanie 1 Przypomnijmy, że Chińskie twierdzenie o resztach mówi, że gdy $m_1, m_2, \dots, m_k$ są parami względnie pierwsze, to naturalny homomorfizm z $\mathbb{Z}_{m_1 \cdot m_2 \dots m_k}$ w $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_k}$ jest izomorfizmem.

Pokaż, że obrazem $\mathbb{Z}_{m_1 \cdot m_2 \dots m_k}^*$ (czyli elementów odwracalnych w $\mathbb{Z}_{m_1 \cdot m_2 \dots m_k}$) tego izomorfizmu jest $\mathbb{Z}_{m_1}^* \times \mathbb{Z}_{m_2}^* \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_k}^*$.

Zadanie 2 Podaj dowolne rozwiązanie w liczbach naturalnych poniższych układów równań.

$$\begin{cases} x \bmod 7 = 2 \\ x \bmod 5 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \bmod 7 = 1 \\ x \bmod 5 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x \bmod 9 = 5 \\ x \bmod 11 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x \bmod 9 = 8 \\ x \bmod 11 = 3 \end{cases}$$

Zadanie 3 Wyznacz największy wspólny dzielnik par wielomianów (o ile nie jest napisane inaczej: w $\mathbb{R}[x]$)

- $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$ oraz $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$;
- $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 4$ oraz $x^4 + 4$ (w $\mathbb{Z}_5[x]$);
- $x^4 - 2x^3 - 19x^2 + 8x + 60$ oraz $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$;
- $x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x$ oraz $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$ (w $\mathbb{Z}_3[x]$).

Zadanie 4 Wyznacz $f + g$, $f \cdot g$ dla podanych wielomianów f, g . Podziel też podane pary wielomianów. (O ile nie jest napisane inaczej: w $\mathbb{R}[x]$):

- $f = x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 10$, $g = x^2 - 4$;
- $f = x^4 + 4x^3 - x^2 - 15x - 11$, $g = x^2 - 4x + 3$;
- $f = x^4 + 1$, $g = x^2 + 3x + 2$ (w $\mathbb{Z}_5[X]$);
- $f = x^2 + 1$, $g = x + 1$ (w $\mathbb{Z}_2[X]$);
- $f = x^p + 1$, $g = x + 1$ (w $\mathbb{Z}_p[X]$ dla p —pierwszego).

Wskazówka: Do ostatniego: policz, ile wynosi $(x + 1)^p$ w $\mathbb{Z}_p$

Zadanie 5 Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem zaś $\mathbb{F}[x]$ pierścieniem wielomianów o współczynnikach z tego ciała. Udowodnij, że każdy wielomian $f \in \text{ciao}[x]$ da się przedstawić jednoznacznie (z dokładnością do kolejności czynników) w postaci $f = c \cdot f_1 \cdot f_2 \dots f_k$, gdzie $c \in \mathbb{F}$ jest stałą, a każde $f_i \in \mathbb{F}[x]$ jest wielomianem nierozkładalnym o wiodącym współczynniku równym 1.

Wskazówka: Założenie o współczynniku równym 1 jest tylko po to, by uniknąć arbitralności w wyborze współczynnika wiodącego, co prowadzi do „różnych” rozkładów.

Zadanie 6 Udowodnij uogólnienia twierdzenia z wykładu:

Niech f będzie wielomianem nierozkładalnym a $p_1 p_2 \dots p_\ell$ wielomianami w $\mathbb{F}[x]$ oraz $f^k | p_1 p_2 \dots p_\ell$. Wtedy istnieją liczby $n_1, n_2, \dots, n_\ell$, takie że $\sum_i n_i \geq k$ oraz dla każdego i zachodzi $f^{n_i} | p_i$.

Zadanie 7 Udowodnij uogólnienia twierdzenia z wykładu:

Niech liczby $c_1, c_2, \dots, c_\ell$ z ciała $\mathbb{F}$ będą pierwiastkami k_i -krotnymi wielomianu $f \in \mathbb{F}[x]$. Wtedy $\sum_i k_i \leq \deg(f)$.

Zadanie 8 Korzystając z tw. Bezout rozłóż poniższe wielomiany z $\mathbb{Z}_2[x]$ na czynniki nierozkładalne

$$x^5 + x^3 + x + 1, \quad x^4 + x^3 + x^2 + 1, \quad x^5 + x^2 + x, \quad x^4 + x^2 + 1, \quad x^4 + x^2 + x.$$

Potraktuj powyższe wielomiany jako wielomiany z $\mathbb{Z}_3[x]$ i również rozłóż je na czynniki nierozkładalne.

Wskazówka: Być może konieczne też będzie osobne zastanowienie się, które wielomiany drugiego stopnia są nierozkładalne.

Zadanie 9 Wielomian f ma resztę z dzielenia przez $x - c_1$ równą r_1 oraz resztę z dzielenia przez $x - c_2$ równą r_2 . Ile wynosi reszta z dzielenia f przez $(x - c_1)(x - c_2)$?

Wystarczy, że zapiszesz zależność na r_1, r_2 , nie musisz jej rozwiązywać.

Wskazówka: Skorzystaj z tw. Bezout.

Zadanie 10 Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem skończonym o n elementach. Pokaż, że w $\mathbb{F}[x]$ prawdziwa jest zależność:

$$x^n - x = \prod_{a \in \mathbb{F}} (x - a)$$

Wskazówka: Porównaj pierwiastki obydwu wielomianów oraz ich wiodące współczynniki.