

Algebra — Exercise Sheet 1

Zadanie 1 Pokaż, że $\mathbb{Z}_p$ jest ciałem dla liczby pierwszej p .

Jedyna nietrywialna część tego zadania to pokazanie, że każdy element ma element odwrotny. Możesz to zrobić według następującego schematu:

- dla ustalonego $a \neq 0$ rozważ $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$;
- pokaż, że elementy w tym ciągu są niezerowe i różne;
- wywnioskuj z tego, że a ma element odwrotny w $\mathbb{Z}_p$.

Exercise 1 Show that $\mathbb{Z}_p$ is a field for a prime number p .

The only non-trivial part of this exercise is to show that each element has an inverse. You can solve this as follows:

- for a fixed $a \neq 0$, consider $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$;
- Show that the elements in the sequence are non-zero and distinct;
- Conclude that a has an inverse in $\mathbb{Z}_p$.

Zadanie 2 Pokaż, że zbiór $\mathbb{Z}_p$ dla p będącego liczbą złożoną nie jest ciałem, działania określamy jako $a+_pb = (a+b) \bmod p$ oraz $a \cdot_p b = (ab) \bmod p$. W tym celu rozważ, czy każdy element ma element odwrotny.

Exercise 2 Show that for a composite number p the set $\mathbb{Z}_p$ is not a field, where the operations are defined as: $a+_pb = (a+b) \bmod p$ and $a \cdot_p b = (ab) \bmod p$. To this end check if each element has an inverse.

Zadanie 3 Pokaż, że zbiór liczb $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ jest ciałem (ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem).

Exercise 3 Show that the set of numbers $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ is a field (with the standard operations of addition and multiplication).

Zadanie 4 Pokaż, że zbiór $\mathbb{R}$ ze zwykłym dodawaniem oraz mnożeniem $a \cdot b := ab\sqrt{2}$ jest ciałem. Jak wygląda „jedynka” a jak „zero” w tym ciele?

Exercise 4 Show that the set $\mathbb{R}$ with the standard operations of addition and a multiplication $a \cdot b := ab\sqrt{2}$ is a field. What is the “One” and the “Zero” in this field?

Zadanie 5 Niech M będzie zbiorem skończonym. Na zbiorze jego podzbiorów 2^M określamy operacje:

$$U + V := V \Delta U, \quad 1 \cdot U = U, \quad 0 \cdot U = \emptyset,$$

gdzie Δ oznacza różnicę symetryczną, tj. $U \Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$. Pokaż, że tak określony zbiór jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Z}_2$.

Exercise 5 Let M be a finite set. On the set 2^M of its subsets, the following operations are defined:

$$U + V := V \Delta U, \quad 1 \cdot U = U, \quad 0 \cdot U = \emptyset,$$

where Δ is the symmetric difference, ie. $U \Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$. Show that this set is a linear space over $\mathbb{Z}_2$.

Zadanie 6 Niech V — przestrzeń liniowa nad $\mathbb{F}$ oraz $S, T \leq V$ będą podprzestrzeniami przestrzeni V . Zdefiniujemy $S \cap T, S + T \subseteq V$ z operacjami takimi, jak w V :

- $S \cap T$ jako zbiór to $S \cap T$ (przecięcie/iloczyn przestrzeni liniowych)
- $S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}$ (suma przestrzeni liniowych)

Pokaż, że $S \cap T$ oraz $S + T$ są odpowiednio: największą przestrzenią zawartą w S i T oraz najmniejszą zawierającą S i T .

Pokaż też, że dla przestrzeni liniowych S, T nad tym samym ciałem $\mathbb{F}$, iloczyn kartezjański $S \times T$ z dodawaniem i mnożeniem po współrzędnych jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$.

Exercise 6 Let V be a linear space over $\mathbb{F}$ and $S, T \subseteq V$ subspaces of the linear space V . Define the operations $S \cap T, S + T \subseteq V$ in V :

- $S \cap T$ as the set $S \cap T$ (intersection of the linear spaces)
- $S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}$ (sum of the linear spaces)

Show that $S \cap T$ and $S + T$ are the largest space contained in S and T and the smallest space containing S and T , respectively.

Also show that, for the linear spaces S, T on the same field $\mathbb{F}$, the Cartesian product $S \times T$ with the coordinate-wise addition and multiplication, is a linear space over $\mathbb{F}$.

Zadanie 7 Sprawdź, czy następujące podzbiory $\mathbb{R}^n$ są podprzestrzeniami liniowymi:

- (1) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 0\}$
- (2) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - c = 0\}$
- (3) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 2a - c = 0\}$
- (4) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 0\}$
- (5) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| = 1\}$
- (6) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = a\}$

Exercise 7 Verify whether the following subsets of $\mathbb{R}^n$ are linear subspaces:

- (1) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 0\}$
- (2) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - c = 0\}$
- (3) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 2a - c = 0\}$
- (4) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 0\}$
- (5) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| = 1\}$
- (6) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = a\}$

Zadanie 8 Pokaż, że zbiór funkcji

$$\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \text{zbiór } \{r : f(r) \neq 0\} \text{ jest przeliczalny}\}$$

jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercise 8 Show that the set of functions

$$\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \text{set } \{r : f(r) \neq 0\} \text{ is countable}\}$$

is a linear subspace of $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 9 Pokaż, że zbiór funkcji

$$\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |f(\mathbb{N})| \text{ jest skończony}\}$$

jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. ($f(A)$ rozumiemy jako $\{f(a) : a \in A\}$.)

Exercise 9 Show that the set of functions

$$\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |f(\mathbb{N})| \text{ is finite}\}$$

is a linear subspace of $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. (By $F(A)$ we mean $\{f(a) : a \in A\}$.)

Zadanie 10 Pokaż, że każda podprzestrzeń liniowa $\mathbb{R}^2$ jest jednej z postaci:

- jedynie wektor zerowy: $\{\vec{0}\}$
- wielokrotności ustalonego wektora z $\mathbb{R}^2$ (czyli wektory stanowiące prostą przechodzącą przez $(0, 0)$)
- całe $\mathbb{R}^2$.

Exercise 10 Show that every linear subspace of $\mathbb{R}^2$ has one of the following forms:

- only the zero vector: $\{\vec{0}\}$
- scalar multiples of a fixed vector of $\mathbb{R}^2$ (thus, a straight line passing through $(0, 0)$)
- the entire $\mathbb{R}^2$.