

Algebra — Exercise 2

Zadanie 1 Pokaż wprost z definicji, że: U jest zbiorem liniowo zależnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w nim wektor $u \in U$, taki że

$$\text{LIN}(U) = \text{LIN}(U \setminus \{u\}).$$

Zaneguj obustronnie tę równoważność, jaką charakteryzację zbioru liniowo niezależnego otrzymałaś (otrzymałeś)?

Exercise 1 Prove from the definition that: U is a system of linearly dependent vectors if and only if there exists a vector $u \in U$, such that

$$\text{LIN}(U) = \text{LIN}(U \setminus \{u\}).$$

What characterization of a system of linearly independent vectors we obtain, when we negate both sides of this equivalence?

Zadanie 2 Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$, $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ układem wektorów, zaś $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ ciągiem skalarów, takich że $\alpha_1 \neq 0$. Pokaż, że

$$\text{LIN}\left(\left\{\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i, v_2, \dots, v_k\right\}\right) = \text{LIN}(\{v_1, v_2, \dots, v_k\}).$$

Exercise 2 Let V be a linear space over the field $\mathbb{F}$, $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ be a system of vectors, and $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ be a sequence of scalars, such that $\alpha_1 \neq 0$. Show that

$$\text{LIN}\left(\left\{\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i, v_2, \dots, v_k\right\}\right) = \text{LIN}(\{v_1, v_2, \dots, v_k\}).$$

Zadanie 3 Przedstaw wektor w jako kombinację podanych wektorów $v_1, v_2, \dots, v_k$ (lub uzasadnij, że to niemożliwe). Podane wektory są zawsze z odpowiedniej przestrzeni $\mathbb{R}^n$:

- (1) $w = (1, 5)$, $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (2, 0)$.
- (2) $w = (5, 10, 11)$, $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 3, 2)$, $v_3 = (1, 1, 1)$.
- (3) $w = (5, 10, 11)$, $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 3, 2)$, $v_3 = (1, 8, 7)$.
- (4) $w = (4, 17, 18)$, $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 3, 2)$, $v_3 = (3, 9, 11)$.

W punktach 3, 4 proponuję skorzystać z Zadania 1 oraz 2, nawet jeśli nie umiesz ich pokazać.

Exercise 3 Write the vector w as a combination of the given vectors $v_1, v_2, \dots, v_k$ (or justify that it is impossible). Given vectors are always from their respective spaces $\mathbb{R}^n$:

- (1) $w = (1, 5)$, $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (2, 0)$.
- (2) $w = (5, 10, 11)$, $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 3, 2)$, $v_3 = (1, 1, 1)$.
- (3) $w = (5, 10, 11)$, $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 3, 2)$, $v_3 = (1, 8, 7)$.
- (4) $w = (4, 17, 18)$, $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 3, 2)$, $v_3 = (3, 9, 11)$.

For part 3 and 4, I suggest that you use exercise 1 or 2, even if you cannot show them.

Zadanie 4 Czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne (nad $\mathbb{R}$)?

- (1) $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$
- (2) $(0, 1, 2)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$
- (3) $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 2, 0, 1)$, $(0, 2, 1, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$
- (4) $(1, 2, 0, 0)$, $(2, 2, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$, $(2, 1, 0, 1)$
- (5) $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 2, 0, 2)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 2, 2)$
- (6) $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 2, 0, 2)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 2, 1)$

Exercise 4 Are the following systems of vectors linearly independent (over $\mathbb{R}$)?

- (1) $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$
- (2) $(0, 1, 2)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$
- (3) $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 2, 0, 1)$, $(0, 2, 1, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$
- (4) $(1, 2, 0, 0)$, $(2, 2, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$, $(2, 1, 0, 1)$
- (5) $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 2, 0, 2)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 2, 2)$
- (6) $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 2, 0, 2)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 2, 1)$

Zadanie 5 Pokaż równoważność następujących warunków (dla $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$):

- Zbiór B jest liniowo niezależny.
- Wektor $\vec{0}$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B .
- Pewien wektor z $\text{LIN}(B)$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B .
- Każdy wektor z $\text{LIN}(B)$ ma najwyżej jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów z B .

Zaneguj powyższe warunki, aby uzyskać charakteryzację zbiorów liniowo zależnych.

Exercise 5 Show the equivalence of the following statements (for $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$):

- The set B is linearly independent.
- Vector $\vec{0}$ has exactly one representation as a linear combination of the vectors from the set B .
- Some vector of the $\text{LIN}(B)$ has exactly one representation as a linear combination of the vectors from the set B .
- Each vector of the $\text{LIN}(B)$ has at most one representation as a linear combination of the vectors from B .

Negate the above statements to obtain a characterization of a linearly dependent set.

Zadanie 6 Niech $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ będzie skończoną bazą przestrzeni V , $u, v \in V$ wektorami zaś $\alpha \in \mathbb{F}$ skalar. Niech wyrażenia tych wektorów w bazie B to

$$(v)_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \qquad (u)_B = (\beta_1, \dots, \beta_k)$$

Pokaż, że wektory $u + v$ oraz αv wyrażają się w bazie B odpowiednio przez

$$(u + v)_B = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_k + \beta_k) \qquad (\alpha v)_B = (\alpha\alpha_1, \dots, \alpha\alpha_k)$$

Exercise 6 Let $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ be a finite basis of the vector space V , $u, v \in V$ be two vectors and $\alpha \in \mathbb{F}$ be a scalar. Let the representation of these vectors in the basis B be

$$(v)_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \qquad (u)_B = (\beta_1, \dots, \beta_k)$$

Show that the vectors $u + v$ and αv is expressed in the basis B , respectively as follows

$$(u + v)_B = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_k + \beta_k) \qquad (\alpha v)_B = (\alpha\alpha_1, \dots, \alpha\alpha_k)$$

Zadanie 7 Rozważamy przestrzeń nad $\mathbb{R}$. Niech $v_1, v_2, \dots, v_n$ będą liniowo niezależne. Dla jakich wartości $\alpha \in \mathbb{R}$

zbiory wektorów

- $\{\alpha v_1 + v_2, v_1 + \alpha v_2\}$
- $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \dots, v_{n-1} + v_n, v_n + \alpha v_1\}$

są liniowo niezależne?

Exercise 7 We consider a vector space over $\mathbb{R}$. Let $v_1, v_2, \dots, v_n$ be linearly independent. For which values of $\alpha \in \mathbb{R}$ the following sets of vectors

- $\{\alpha v_1 + v_2, v_1 + \alpha v_2\}$
- $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \dots, v_{n-1} + v_n, v_n + \alpha v_1\}$

are linearly independent?

Zadanie 8 Udowodnij Twierdzenie Steinitza o wymianie: Załóżmy, że V jest przestrzenią skończenie-wymiarową. Niech U —zbiór liniowo niezależny a B jest bazą V . Pokaż, że albo U jest bazą, albo istnieje $v \in B$, taki że $\{v\} \cup U$ jest liniowo niezależny.

Exercise 8 Prove the Steinitz exchange Theorem: Suppose that V is a finite-dimensional space. Let U be a linearly independent set and B be a basis of V . Show that either U is the basis, or there is a $v \in B$, such that $\{v\} \cup U$ is linearly independent.

Zadanie 9 Rozważmy przestrzeń $\mathbb{Z}_3^3$ (zbiór trzelementowych ciągów elementów z $\mathbb{Z}_3$, nad ciałem $\mathbb{Z}_3$). Ile wektorów należy do $\text{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 1))$? A ile do $\text{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 2))$?

Exercise 9 Consider the vector space $\mathbb{Z}_3^3$ (a set of triplets with the elements from $\mathbb{Z}_3$, over the field $\mathbb{Z}_3$). How many vectors belong to the set $\text{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 1))$? How many vectors belong to the set $\text{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 2))$?

Zadanie 10 Dla poniższych zbiorów wektorów sprawdź, czy są one bazą przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Jeśli nie, to wybierz z nich maksymalny zbiór liniowo niezależny X i podaj dowolny zbiór wektorów Y , taki że $X \cup Y$ jest bazą.

- $\{(1, 0, -1, 2), (2, 3, 4, 1), (0, 0, 1, 0)\}$
- $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1)\}$
- $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$
- $\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$
- $\{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (2, 0, 1, 1), (-1, 0, 1, -2)\}$

Exercise 10 Verify that, for the following sets of vectors, whether they are a basis of the $\mathbb{R}^4$. If not, select a maximum linearly independent subset of X and give any set of vectors Y such that $X \cup Y$ is a basis.

- $\{(1.0, -1.2), (2, 3, 4, 1), (0, 0, 1, 0)\}$
- $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1)\}$
- $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$
- $\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$
- $\{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (2, 0, 1, 1), (1, 0, 1, -2)\}$